

UMU REPORTS IN STEM EDUCATION 2025:I

# En lärarguide för att stödja elevers problemlösning

*Johan Lithner, Anna Ida Säfström, Björn Palmberg,  
Johan Sidenvall, Carina Granberg, Catarina Andersson,  
Erika Boström & Torulf Palm*

Institutionen för naturvetenskapens och matematikens didaktik



UMEÅ UNIVERSITET

ISSN 3035-837X  
ISBN 978-91-8070-585-1

En lärarguide för att stödja elevers problemlösning © 2025 av Johan Lithner, Anna Ida Säfström, Björn Palmberg, Johan Sidenvall, Carina Granberg, Catarina Andersson, Erika Boström & Torulf Palm är licensierad under [CC BY-NC-ND 4.0](#)

*Umeå reports in STEM education* publicerar texter med anknytning till didaktisk forskning om STEM-ämnena: naturvetenskap, teknik, ingenjörsvetenskap och matematik. Texterna i denna rapportserie genomgår ingen granskningsprocess, utöver en bedömning av att syftet och villkoren för rapportserien är uppfyllda. Författarna är fullt ut ansvariga för vetenskaplig kvalitet, att etiska riktlinjer följs, att relevanta rättigheter för publicering av bilder finns, språkgranskning, layout samt att texterna i övrigt följer relevanta regler och god praxis.

#### **Du har tillstånd att:**

**Dela** – kopiera och vidare distribuera materialet oavsett medium eller format. Licensgivaren kan inte återkalla dessa friheter så länge du följer licensvillkoren.

#### **På följande villkor:**

**Erkännande** – Du måste ge [ett korrekt erkännande](#), ange en hyperlänk till licensen, och [ange om bearbetningar är gjorda](#). Du behöver göra så i enlighet med god sed, och inte på ett sätt som ger en bild av att licensgivaren stödjer dig eller ditt användande.

**IckeKommersiell** – Du får inte använda materialet för [kommersiella ändamål](#).

**IngaBearbetningar** – Om du [remixar, transformerar, eller bygger vidare på](#) materialet, får du inte distribuera det modifierade materialet.

**Inga ytterligare begränsningar** – Du får inte tillämpa lagliga begränsningar eller [teknologiska metoder](#) som juridiskt begränsar andra från att göra något som licensen tillåter.

#### **Anmärkningar:**

Du behöver inte följa licensvillkoren för de delar av materialet som finns i public domain eller där ditt användande är tillåtet av en tillämplig [undantag eller begränsning](#).

Inga garantier ges. Licensen ger eller ger dig inte alla de nödvändiga villkoren för ditt tänkta användande av verket. Till exempel, andra rättigheter som [publicitet, integritetslagstiftning, eller ideella rättigheter](#) kan begränsa hur du kan använda verket.

Referera till denna rapport genom att ange:

Lithner, J., Säfström, A. I., Palmberg, B., Sidenvall, J., Granberg, C., Andersson, C., Boström, E., & Palm, T. (2025). *En lärarguide för att stödja elevers problemlösning* (UmU Reports in STEM Education 2025:1). Umeå universitet.

[https://www.umu.se/globalassets/organisation/fakulteter/teknat/institutionen-for-naturvetenskapernas-och-matematikens-didaktik/urSTEME/URSTEME\\_2025\\_1.pdf](https://www.umu.se/globalassets/organisation/fakulteter/teknat/institutionen-for-naturvetenskapernas-och-matematikens-didaktik/urSTEME/URSTEME_2025_1.pdf)

# En lärarguide för att stödja elevers problemlösning

|           |                                                                         |           |
|-----------|-------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b>  | <b>UTGÅNGSPUNKTER, SYFTE OCH STRUKTUR.....</b>                          | <b>2</b>  |
| 1.1       | UTGÅNGSPUNKTER.....                                                     | 2         |
| 1.2       | SYFTE.....                                                              | 2         |
| 1.3       | GUIDENS ÖVERGRIPANDE STRUKTUR .....                                     | 3         |
| <b>2</b>  | <b>MATEMATIKPROBLEM SOM HÄNVISAS TILL I EXEMPEL I GUIDEN .....</b>      | <b>4</b>  |
| <b>3</b>  | <b>KOMPETENSER FÖR PROBLEMLÖSNING .....</b>                             | <b>4</b>  |
| 3.1       | RESURSER.....                                                           | 5         |
| 3.2       | STRATEGIER.....                                                         | 5         |
| 3.3       | REFLEKTION .....                                                        | 6         |
| 3.4       | UPPFATTNINGAR .....                                                     | 7         |
| <b>4</b>  | <b>FORMATIV BEDÖMNING: INFORMATION, DIAGNOS OCH ÅTERKOPPLING .....</b>  | <b>7</b>  |
| 4.1       | SAMLA INFORMATION GENOM ATT STÄLLA DIAGNOSFRÅGOR.....                   | 8         |
| 4.2       | STÄLLA DIAGNOS.....                                                     | 8         |
| 4.3       | GE ÅTERKOPPLING .....                                                   | 9         |
| 4.4       | ÖNSKAD RESPONS .....                                                    | 9         |
| <b>5</b>  | <b>FASER I PROBLEMLÖSNING.....</b>                                      | <b>10</b> |
| 5.1       | TOLKA .....                                                             | 10        |
| 5.2       | UTFORSKA.....                                                           | 11        |
| 5.3       | SKAPA LÖSNINGSIDÉ.....                                                  | 12        |
| 5.4       | OMSÄTTA LÖSNINGSIDÉ.....                                                | 13        |
| <b>6</b>  | <b>TVÅ HUVUDTYPER AV SVÅRIGHETER.....</b>                               | <b>13</b> |
| 6.1       | KÖRT FAST (A–B) .....                                                   | 14        |
| 6.2       | FEL/OSÄKER (C–E).....                                                   | 15        |
| 6.3       | PRIORITERING OM ELEVEN BÅDE GJORT FEL OCH KÖRT FAST .....               | 16        |
| <b>7</b>  | <b>KÖRT FAST.....</b>                                                   | <b>16</b> |
| 7.1       | KÖRT FAST, GENERELL DIAGNOS AB .....                                    | 16        |
| 7.2       | ELEVEN PÅBÖRJAR INTE TOLKNING 1A.....                                   | 17        |
| 7.3       | ELEVEN LYCKAS INTE GENOMFÖRA TOLKNING 1B.....                           | 17        |
| 7.4       | ELEVEN PÅBÖRJAR INTE UTFORSKNING 2A .....                               | 17        |
| 7.5       | ELEVEN LYCKAS INTE GENOMFÖRA UTFORSKNING 2B .....                       | 18        |
| 7.6       | ELEVEN PÅBÖRJAR INTE SKAPA LÖSNINGSIDÉ 3A .....                         | 19        |
| 7.7       | ELEVEN LYCKAS INTE GENOMFÖRA SKAPA LÖSNINGSIDÉ 3B .....                 | 20        |
| 7.8       | (ELEVEN PÅBÖRJAR INTE OMSÄTTA LÖSNINGSIDÉ 4A) .....                     | 21        |
| 7.9       | ELEVEN LYCKAS INTE GENOMFÖRA OMSÄTTA LÖSNINGSIDÉ 4B.....                | 21        |
| <b>8</b>  | <b>FEL/OSÄKER.....</b>                                                  | <b>22</b> |
| 8.1       | FEL/OSÄKER, GENERELL DIAGNOS CDE .....                                  | 22        |
| 8.2       | ELEVEN BEHÖVER UTVÄRDERA MOT UPPGIFTSFORMULERINGEN 1C.....              | 23        |
| 8.3       | ELEVEN BEHÖVER UTVÄRDERA MOT SIN UTFORSKNING 2C.....                    | 24        |
| 8.4       | ELEVEN BEHÖVER UTVÄRDERA MOT SIN LÖSNINGSIDÉ 3C .....                   | 24        |
| 8.5       | ELEVEN BEHÖVER UTVÄRDERA MOT SINA MATEMATISKA FÖRKUNSKAPER XC .....     | 24        |
| 8.6       | OM ELEVEN ÄR FORTSATT SÄKER VID FEL D .....                             | 25        |
| 8.7       | OM ELEVEN ÄR FORTSATT OSÄKER VID RÄTT E .....                           | 25        |
| <b>9</b>  | <b>HUR KAN MAN BÖRJA TILLÄMPA FORMATIV BEDÖMNING I SIN KLASS? .....</b> | <b>25</b> |
| <b>10</b> | <b>SAMMANFATTANDE INSTRUKTIONER FÖR ANVÄNDNING AV GUIDEN.....</b>       | <b>26</b> |

# 1 Utgångspunkter, syfte och struktur

Denna lärarguide är en vägledning för lärare som vill stödja elevers egna matematiska resonemang i matematisk problemlösning. Inledningsvis formuleras utgångspunkter för problemlösning, lärarguidens syfte samt guidens övergripande struktur. Guiden beskriver därefter vad lärande om och genom problemlösning innebär, elevers svårigheter i problemlösning, samt hur undervisning kan stödja elevers lärande. Andra halvan av guiden presenterar ett ramverk med specifika diagnoser och tillhörande förslag på hjälp till elever, vilket sammanfattas i ett översiktsblad på sista sidan.

Utvecklingen av lärarguiden påbörjades 2015. Den senaste fasen skedde 2019–2024 i forsknings- och utvecklingsprojekt tillsammans med över femtio lärare i Hudiksvall, Umeå och Vännäs kommun, genom att testa och studera olika sätt att hjälpa elever från åk 1 till gymnasiet. Arbetet har finansierats av Vetenskapsrådet, Skolforskningsinstitutet, den nationella ULF-verksamheten för praktisknära forskning, Lärarhögskolan vid Umeå universitet och de deltagande kommunerna. Du kan läsa mer om forskningen bakom guiden på forskargruppen [LICRs hemsida](#).

## 1.1 Utgångspunkter

Ett *problem* definieras som en uppgift där eleven inte har en på förhand känd eller given lösningsmetod (se Skolverkets kommentarmaterial till kursplanen i matematik). Problemlösning innebär därför att eleven behöver *resonera* sig fram till en lösning, det vill säga konstruera en tankegång som stöds av matematiska argument. Med denna definition kan ett problem vara enkelt eller svårt, ha verklighetsanknytning eller vara inommatematiskt, och vara formulerat kortfattat eller utförligt. Vanligtvis är en minoritet av uppgifterna i matematikläroböcker problem. Majoriteten av uppgifterna är *rutinuppgifter*, det vill säga uppgifter där lösningsmetoden finns i boken eller ges av läraren.

Problemlösning är en viktig del av matematikundervisningen och forskning visar också att problemlösning är viktigt för lärande. Eleven kan inte lära matematik på ett bra sätt genom att bara lösa uppgifter med givna lösningsmetoder, utan behöver åtminstone till viss del lära om och genom egen problemlösning. Imitation av givna lösningsmetoder medför att eleven kan lösa många uppgifter utan mycket hjälp, vilket kan verka effektivt i stunden, men eleven utvecklar vare sig förmågan att resonera i obekanta situationer eller matematisk förståelse. Detta beror på att eleven kan imitera en lösningsmetod utan att reflektera över matematiska egenskaper hos begrepp och samband. Eleven kan därför ofta lära sig mer av att själv försöka konstruera lösningen, även om hen inte når ända fram.

Om eleven behöver hjälp och enda syftet är att eleven ska lösa uppgiften är enklaste vägen att läraren beskriver lösningsmetoden. Sådan hjälp medför dock att det enda eleven behöver göra är att imitera metoden läraren beskrivit. Läraren kan också med frågor eller uppmaningar leda eleven genom lösningen steg för steg, så att eleven inte behöver resonera själv, utan bara göra sådant hen redan kunde. Om syftet snarare är att eleven ska lära genom arbetet med uppgiften, bör hjälpen syfta till att eleven behåller så mycket som möjligt av ansvaret för att komma vidare med lösningen. Sådan hjälp kräver att läraren 1) samlar information om hur eleven har tänkt, 2) använder informationen för att identifiera (diagnostisera) elevens specifika svårighet, 3) ger återkoppling som är avgränsad till elevens specifika svårighet och stödjer eleven att själv fortsätta försöka lösa problemet, och 4) lämnar eleven när den åter kommit i gång med sitt eget resonemang. Med andra ord behöver läraren praktisera formativ bedömning.

## 1.2 Syfte

Det är ofta utmanande för matematikelever att lösa problem, och för lärare att stödja elever under problemlösning. Guiden är ett stöd för läraren att identifiera vanligt förekommande typer

av svårigheter elever har med att resonera själv i matematisk problemlösning och välja lämplig återkoppling som hjälper elever att komma vidare i ett problemlösningsförsök. Guiden är avsedd att användas när det primära målet för lärarens hjälp är att eleven själv ska konstruera en lösning för hela eller så stor del som möjligt av uppgiften, även om det medför att lärarens hjälp inte alltid garanterar att eleven löser uppgiften.

Guiden kan ibland vara användbar när eleven arbetar med både problem och rutinuppgifter, i de fall när eleven möter en svårighet och läraren bedömer att eleven själv kan resonera sig genom svårigheten. Den är inte tänkt att tillämpas när läraren bedömer att det inte är rimligt att eleven själv (med stöd) kan resonera sig framåt i lösningen.

Guiden fokuserar matematikspecifika svårigheter, inte andra typer av svårigheter såsom till exempel kognitiva svårigheter och språksvårigheter. Den är generell i meningen att den kan användas för alla skolnivåer och matematiska ämnesinnehåll, men läraren kan behöva specificera och anpassa förslagen på återkopplingar till eleven, uppgiften och situationen. Den är ett komplement till lärarens övriga arbete med elevinteraktion i matematikklassrummet. Oavsett vad guiden föreslår måste läraren i varje situation göra bedömningen om den föreslagna hjälpen är rimlig eller ej. Det kan finnas andra bättre sätt att stödja eleven än guidens föreslagna hjälp.

### 1.3 Guidens övergripande struktur

Guiden är ett stöd för läraren att tillämpa formativ bedömning, och kan sammanfattas i en tabell. Tabellens rader beskriver olika typer av svårigheter som kan uppstå, där de två huvudsakliga är ”kört fast” och ”gjort fel och/eller är osäker”. Tabellens kolumner beskriver problemlösningens fyra faser där den första, Tolka, handlar om att förstå uppgiftens information och de tre övriga, Utforska, Skapa lösningsidé och Omsätta lösningsidé, handlar om att lösa uppgiften.

|            | Diagnosfrågor     |                   |                   |                     |
|------------|-------------------|-------------------|-------------------|---------------------|
|            | Tolka             | Utforska          | Skapa lösningsidé | Omsätta lösningsidé |
| Kört fast  | Diag./Åter./Resp. | Diag./Åter./Resp. | Diag./Åter./Resp. | Diag./Åter./Resp.   |
| Fel/osäker | Diag./Åter./Resp. | Diag./Åter./Resp. | Diag./Åter./Resp. | Diag./Åter./Resp.   |

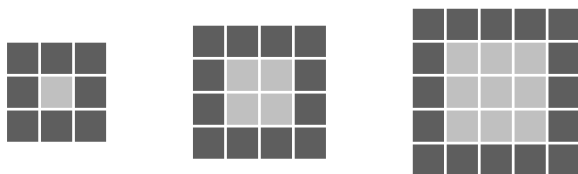
I guiden och på översiktsbladet på sista sidan används färgmarkeringar för de fyra stegen i formativ bedömning: Diagnosfrågor i svart, Diagnoser i **rött**, Återkopplingar i **blått** samt Önskad Respons från eleven i **grönt**.

## 2 Matematikproblem som hänvisas till i exempel i guiden

I konkreta exempel på bland annat svårigheter och återkoppling nedan används några olika matematikproblem. De första två är typer av problem som är vanligt förekommande och kan anpassas till många olika årskurser. Det tredje är ett exempel på ett problem som kan vara mer utmanande och kräva mycket utforskning, som kan passa på gymnasienivå.

### Stenplattor

Ett mönster läggs med hjälp av kvadratiske stenplattor, mörka och ljusa. Så här ser mönstret ut:



figur 1

figur 2

figur 3

Version 1: Hur många mörka respektive ljusa plattor behövs det för att bygga figur 100?

Version 2: Kan du komma på ett knep som gör det lätt att räkna ut hur många mörka respektive ljusa plattor det går åt till vilken figur som helst?

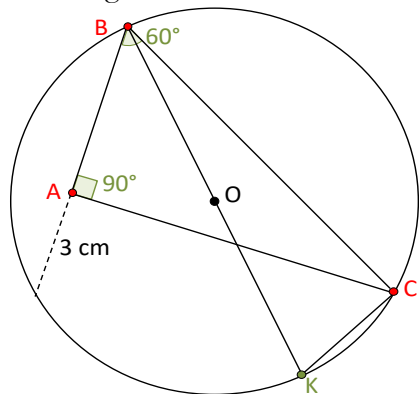
Version 3: Hur många mörka respektive ljusa plattor det går åt till figur  $n$ ?

### Ljustakar

På ett slott finns 29 ljustakar. Vissa ljustakar är femarmade och andra är sjuarmade. Till alla ljustakarna sammanlagt går det åt 187 ljus. Hur många ljustakar finns det av varje sort?

### Cirkel

Hur lång är sträckan KC?



## 3 Kompetenser för problemlösning

För att klargöra vilken typ av stöd elever kan behöva under problemlösning, beskrivs här vad elever behöver kunna göra för att konstruera en lösning till ett problem. Arbete med rutinuppgifter kräver endast att eleven noggrant imiterar den givna metoden. Forskaren Alan H. Schoenfeld har visat att framgångsrik problemlösning genom egna resonemang däremot kräver fyra kompetenser: Resurser, Strategier, Reflektion och Uppfattningar. Det finns generellt inte något annat sätt att utveckla dessa kompetenser än att arbeta med problemlösning, och lärarens hjälp till eleven kan stödja utvecklingen av dessa kompetenser i större eller mindre omfattning. Detta avsnitt definierar kompetenserna, beskriver hur de kan utvecklas och i generella termer vilken typ av hjälp som kan stödja elevers utveckling till problemlösare.

### 3.1 Resurser

Resurser är individens matematiska kunskaper och verktyg som kan användas för att lösa ett problem, inklusive fakta, definitioner, matematiska begrepp, representationer (t ex symboler, bilder, konkret material) och algoritmiska standardprocedurer som löser specifika rutinuppgiftstyper. Här ingår även sådana utommatematiska kunskaper som behövs för att lösa en matematikuppgift, t ex vardagliga uttryck eller sammanhang som problemet utgår ifrån.

Resurser kan behövas i alla problemlösningsfaser, exempelvis:

- Stenplattor: Att kunna räkna antalet plattor noggrant under utforskningsfasen.
- Ljusstakar: Att förstå orden ”femarmad” och ”sjuarmad” i tolkningsfasen. Att använda addition och multiplikation för olika exempel under utforskningsfasen. Metoder för att lösa ekvationssystem under omsättandet av lösningsidé, om ekvationssystem är elevens lösningsidé.
- Cirkel: Att använda grundläggande samband mellan vinklar och sträckor i geometriska figurer, samt randvinkelsatsen under faserna utforskning, skapande och omsättandet av lösningsidé.

Resurser kan också utvecklas genom problemlösning då eleven skapar, använder och reflekterar över egenskaper hos och samband mellan olika matematiska begrepp och metoder. Därför bör lärarens hjälp sikta mot att eleven beskriver och förklarar vad hen har gjort och varför samt att eleven försöker upptäcka och formulera matematiska samband och egenskaper, till exempel: vad X innebär, hur X hänger samman med Y eller varför en slutsats är sann.

Samtidigt som nya resurser kan utvecklas genom problemlösning, kan bristande resurser vara ett hinder för att genomföra problemlösning. Om eleven saknar resurser som läraren trott att eleven har och som är en förutsättning för att lösa problemet, kan det vara orimligt att eleven ska resonera sig fram till dessa resurser själv, t ex om eleven inte känner till ett begrepp eller en matematisk symbol som används i uppgiftsformuleringen. I sådana situationer behöver läraren därför lämna guiden och förklara det eleven behöver veta, så att eleven kan gå vidare med sitt försök att lösa problemet.

Ibland är det dock rimligt att försöka hjälpa eleven att själv skapa denna bristande resurskunskap genom att resonera sig fram till en procedur eller ett samband, vilket kan ses som ett ”delproblem i problemet”. Guiden kan då användas på detta delproblem. Till exempel kan det ingå i ett problem att beräkna kvoten av två bråk, och det kanske är rimligt (och viktigt) för eleven att själv konstruera en beräkningsmetod för detta för att bygga förståelse för hur kvoten kan beräknas och varför, ifall hen inte förstår det sedan tidigare.

### 3.2 Strategier

Strategikompetens innefattar både att kunna välja (inklusive att minnas, konstruera eller rekonstruera) och att använda strategier för utforskning under problemlösning. Medan en standardprocedur (en resurs) är en lösningsmetod för en specifik uppgift eller uppgiftstyp, är en strategi en mer generell ansats som kan användas på ett bredare spektrum av uppgifter men som inte är en fullständig lösningsmetod. Dels behöver strategin anpassas till det specifika problemet genom att beakta det matematiska innehållet, dels är det inte säkert att den leder hela vägen fram till ett svar. Exempel på strategier för problemlösning är: att rita eller använda konkret material för att representera matematiken i uppgiften, att prova exempel, att undersöka extremfall, att lösa en enklare version av problemet, att dela upp lösningen i olika steg, att söka motexempel, att bokföra olika fall i en tabell, och att tänka baklänges. För olika problem kan olika strategier konkretiseras på olika sätt, exempelvis:

- Stenplattor: Att rita flera på varandra följande figurer. Att göra en tabell för antalet ljusa respektive mörka plattor för olika figurer.

- Ljusstakar: Att testa några exempel. Att testa exemplen 'inga femarmade' respektive 'inga sjuarmade' ljusstakar. Att försöka teckna uttryck för sambanden.
- Cirkel: Att rita in olika sträckor och vinklar och se vilka som går att bestämma med hjälp av den givna informationen.

Om eleven känner till få eller inga strategier kör eleven ofta fast tidigt i problemlösningssprocessen, eftersom hen inte har något sätt att komma i gång med sin lösning. Det viktigaste för att utveckla denna kompetens är att få möjlighet att själv lösa många olika problem där olika strategier kan användas, och att jämföra och utvärdera olika strategier. Lärarens hjälp bör därför stötta elevens utveckling av strategikompetens genom att efterfråga beskrivningar, förklaringar och motiveringar av vad eleven har gjort och genom att föreslå och uppmuntra eleven att testa olika strategier.

Att ge en elev hjälp som stödjer användning av strategier kan göras öppet eller mer specificerat. En öppen återkoppling kan t ex vara att inte säga mer än "Vilka lämpliga strategier känner du till?" eller "Kan du prova att rita?". En mer specifik strategiåterkoppling är "Hur kan du rita ljusstakar för att undersöka hur många femarmade och sjuarmade ljusstakar det kan vara?" Om hjälpen går så långt att läraren genom frågor, ledtrådar, eller procedurbeskrivningar ger vägledning till hela eller stora delar av en fullständig lösningsmetod handlar det inte längre om strategier, eftersom läraren då övertagit ansvaret för lösningen och uppgiften inte längre är ett problem för eleven. Till exempel är "Rita 29 femarmade ljusstakar, räkna ut hur många ljus som återstår till 187 och använd dem för att göra om femarmade till sjuarmade" inte en strategi utan en (kortfattat formulerad) lösningsmetod. Därför bör strategihjälp sikta mot att eleven själv tar ansvar för att anpassa en generell strategi till det aktuella problemet. Strategihjälp bör var så öppen som möjligt men samtidigt tillräckligt specifik för att eleven ska kunna resonera vidare själv.

### 3.3 Reflektion

Reflektion (ibland kallad metakognition) handlar om att överblicka sin egen problemlösningssprocess och fatta övergripande beslut om vad nästa steg bör vara. Till exempel:

- Stenplattor: Att inse att det bör finnas ett enklare sätt att ta reda på antalet plattor än att rita den 100:ade figuren.
- Ljusstakar: Att efter att ha testat med 0 och 10 femarmade ljusstakar inse att antalet ljus totalt för 10 femarmade ligger ganska nära 187, men ger för få ljus, och utifrån det dra slutsatsen att det är lämpligt att testa med 9 eller 8 femarmade ljusstakar.
- Cirkel: Att efter ett omfattande försök att identifiera kongruenta trianglar som inte lett närmare en lösning, välja att avbryta och prova en annan ansats.

En viktig del av reflektion är därför utvärdering av det man gjort hittills, det vill säga att fundera över och avgöra om det man gjort hittills är rätt, lämpligt och effektivt. Hög reflektionskompetens innefattar därför att eleven känner till och kan använda olika sätt att utvärdera, t ex att kontrollera de olika stegen i sin lösning, göra rimlighetsbedömningar, testa idéer på väl valda exempel, stämma av vad man kommit fram till med vad som efterfrågades i uppgiften, lösa uppgiften på ett annat sätt och jämföra de två lösningarna, och ställa sig utvärderande frågor som "Vad händer om...?" och "Är det rimligt att...?". Reflektion innefattar dock mer än utvärdering och innefattar också att analysera och identifiera vad som är användbart bland de saker man har gjort hittills, samt att planera vad nästa steg bör vara. Reflektion är därför viktigt för att kunna dra nytta av utforskning i skapandet av en lösningsidé. Även i dessa fall kan reflektion innebära att ställa frågor till sig själv, t ex: "Vad håller jag på med?", "Ser jag något mönster?", "Vad har jag kommit fram till hittills?".

För att utveckla denna kompetens behöver eleven möta situationer där reflektion behövs. Det är därför svårt att utveckla reflektion om eleven bara arbetar med väldigt enkla problem som kräver



få steg att lösa. Läraren kan behöva hjälpa eleven att reflektera över sin lösning för att minska risken för fel och misstag, onödiga omvägar och ineffektiva strategier. Hjälpens kan även sikta mot att stödja eleven att planera för utforskning samt att registrera och fundera över vart hen är på väg med det hen gör. Läraren kan stötta elevers utveckling av reflektion genom att efterfråga förklaringar och motiveringar till vad eleven har gjort eller tänker göra och genom att be eleven att utvärdera det den hittills har gjort. Denna typ av hjälp kan också i viss mån ges genom att ställa diagnosfrågorna (se nedan).

### 3.4 Uppfattningar

Uppfattningar innefattar elevens matematiska världsbild: elevens syn på matematik, vad problemlösning är, sin roll som matematikelev och lärarens roll i matematikklassrummet. För att bli en bra problemlösare krävs även uppfattningar som relaterar till tilltro till sin egen förmåga. Till exempel att anse att egen problemlösning och egna resonemang är ett bra sätt att lära sig matematik; tro att det går att klura ut saker om man inte ger upp vid utmaningar; anse att problemlösning kan och bör få ta tid; uppleva att man har egen matematisk auktoritet i meningen att det egna matematiska resonemanget kan användas för att göra val och dra slutsatser, i stället för att alltid vara beroende av andras (t.ex. lärarens) bedömningar.

Även om uppfattningar påverkas av många faktorer utvecklas de till stor del genom elevens erfarenheter av matematikundervisning, ofta under lång tid. Läraren kan indirekt, genom hjälp som riktas mot till exempel strategier eller reflektion, stödja positiva uppfattningar genom att eleven får behålla ansvaret för lösningsarbetet både i framgångar och motgångar, erfara att hen kan konstruera lösningar för både mer och mindre utmanande problem, och via egna argument erfara sin matematiska auktoritet. Om läraren konsekvent ställer frågor om vad eleven gjort och varför (se även diagnosfrågor nedan) kan det etablera normen att det ingår i elevens ansvar att reflektera över dessa frågor. Medan det kortsiktiga syftet med hjälpen alltså kan vara att eleven arbetar vidare med problemet, kan det långsiktigt leda till att elevens uppfattningar förändras via positiva erfarenheter av problemlösning.

Lärarens hjälp bör visa att och hur matematisk auktoritet, kompetens och framgång i problemlösning utgår från matematiska resonemang och inte från till exempel personliga egenskaper. Även mer direkt uppmuntran och bekräftelse kan stödja elevens uppfattningar om de riktas mot elevens matematiska arbete och resonemang: ”Bra att du ritat flera olika exempel, för det gör att du kan få en bild av hur mönstret växer”, ”Det är jättebra att du har skrivit ner det du kommit fram till på ett systematiskt sätt, för det gör att du får överblick över vad du gjort”, ”Jag hör att du har tänkt genom vad du gjort och varför, och att du har argument för dina slutsatser. Du har övertygat mig.” Denna generella typ av uppmuntran är vanligtvis inte specifik för olika svårighetstyper, och behandlas därför inte vidare i guiden.

## 4 Formativ bedömning: information, diagnos och återkoppling

När läraren hjälper eleven med en rutinuppgift finns mindre behov av att anpassa hjälpen till den specifika svårigheten, eftersom den huvudsakliga ansatsen alltid är att läraren beskriver lösningsmetoden. Om läraren däremot vill hjälpa eleven med problemlösning bör läraren enligt utgångspunkterna ovan låta eleven så långt som möjligt behålla ansvaret för problemets lösning. Därför måste läraren ta reda på vad elevens specifika svårighet är, anpassa hjälpen så att den stödjer eleven att själv resonera sig genom svårigheten, och avgränsa hjälpen så att den inte går utöver den specifika svårigheten. Då behöver läraren använda formativ bedömning. De fyra steg som utgör formativ bedömning är att 1) samla **information** om elevens tänkande, 2) ställa **diagnos** (identifiera elevens specifika svårighet), 3) anpassa sin **återkoppling** till diagnosen för att hjälpa eleven att själv ta sig förbi svårigheten och 4) bedöma om återkopplingen ledde till **önskad respons** för diagnosen.

#### 4.1 Samla information genom att ställa diagnosfrågor

Den huvudfråga som läraren försöker besvara i diagnosticeringen är ”**vilken specifik svårighet behöver eleven hjälp med?**”. För att kunna göra det innehåller guiden förslag till diagnosfrågor nedan som läraren kan ställa till eleven för att få tillräcklig information för att ställa en diagnos.

##### Diagnosfråga I: “Vad du har gjort hittills?”

Detta är första steget i att inhämta information om vad eleven gjort och hur långt hen kommit i sitt lösningsförsök. Syftet är att klargöra hur långt eleven kommit i faserna Tolka, Utforska, Skapa Lösningssidé och Omsätta Lösningssidé, och om eleven har gjort något fel eller är osäker.

##### Diagnosfråga II: ”Varför du gjort så?”

Eftersom eleven vanligtvis inte självant inkluderar en argumentation i svaret på fråga I kan läraren behöva förstå mer om hur eleven resonerat. Syftet är att klargöra elevens orsaker till varför hen gjort det hen gjort, och om eleven har en lösningssidé bakom det hen gjort eller inte. Fråga I siktar mot att eleven beskriver *vad*, fråga II mot att eleven motiverar och förklarar *varför*. Att ge matematiska argument är ofta svårare för eleven att göra än att beskriva vad hen gjort, men kan bättre klargöra hur eleven tänkt, eftersom den riktas mot elevens förståelse av matematiken i uppgiften och hur elevens resonemang hänger ihop och är relaterat till uppgiften. Andra liknande frågor kan fylla samma syfte, t ex: ”Hur kommer det sig att du har gjort så?” eller ”Vilka är dina matematiska argument för att göra det?”. Läraren kan också behöva följa upp med mer specifika frågor för att få eleven att utveckla sina argument, t ex: ”Du sa att du tog tre gånger fem, var kom det ifrån?”. När eleven ombeds (i diagnosfrågor eller i återkoppling) argumentera, motivera eller förklara är syftet alltid att eleven ska förklara *varför*, inte bara beskriva *vad* hen gjort eller tänker göra.

Det är inte den exakta formuleringen av frågorna som är avgörande, utan det viktiga är att syftet med frågorna behålls. Formuleringen kan anpassas till situationen, t ex elevens ålder. Frågorna kan även omformuleras som uppmaningar (”Berätta vad du gjort hittills”). Ibland ger eleven så mycket information självant eller redan efter första frågan att läraren utifrån det kan identifiera svårigheten. Då behöver inte fler frågor ställas. Om läraren inte får tillräcklig information för att förstå elevens svårighet ställs kompletterande frågor i samband med eller efter frågorna ovan, på det sätt som läraren bedömer lämpligt. Frågorna bör inte vara vägledande i meningen att läraren ger eleven specifika ledtrådar, utan eleven bör behålla ansvaret att lösa uppgiften. Ibland har eleven svårt att ge tillräcklig information muntligt, då kan läraren be eleven skriva ned eller rita hur hen tänkt och om lämpligt lämna eleven en stund medan hen gör det. Det kan ta tid för eleverna att vänja sig vid frågorna (särskilt II) och vad som egentligen efterfrågas, men det går fortare om läraren använder frågorna oftare. Ibland kommer eleven förbi svårigheten bara genom att svara på frågorna, vilket gör att läraren inte behöver ställa någon diagnos eller ge någon specifik återkoppling. Att man inte börjar att fråga eleven vad uppgiften handlar om, som många lärare tycker är naturligt att göra, beror på att man ofta ändå får information om elevens tolkning av uppgiften genom elevens svar på frågorna I och II. Ibland är det dock viktigt att läraren frågar vad uppgiften handlar om, t ex om läraren är osäker på om eleven har gjort en korrekt tolkning eller om läraren har svårt att förstå elevens svar på diagnosfrågorna. Om läraren inte vet vilken uppgift eleven arbetar med kan hen också inleda med att fråga det.

#### 4.2 Ställa diagnos

Diagnosen ställs utifrån den information om elevens resonemang som läraren har tillgänglig. Ibland är det svårt att ställa diagnos på grund av att eleven inte kan ge tillräcklig information, eller på grund av att eleven har flera olika svårigheter samtidigt. Guiden har riktlinjer (se nedan) om hur dessa situationer ska hanteras, men läraren behöver också ta in andra faktorer, t ex tillgänglig

lektionstid och kännedom om eleven, och göra en egen bedömning om vad som är rimligt att göra.

Det bör noteras att det inte rör en diagnos av eleven eller någon egenskap hos eleven som person, utan termen diagnos används i guiden enbart för matematikspecifika svårigheter i ett uppgiftslösningsresonemang, t ex att eleven har en ofullständig lösningssidé eller att eleven gjort ett beräkningsfel. Om läraren vill hjälpa eleven att resonera själv bör läraren alltid börja interaktionen med att samla information och tolka den för att ställa diagnos innan återkoppling ges. Det kan vara lockande för läraren att inte ställa så noggrann diagnos för att spara tid. Risker är då inte bara att eleven får fel hjälp, utan också att läraren ger mer hjälp än nödvändigt för att vara säker på att eleven kommer vidare. Det vill säga, läraren tar över mer än nödvändigt av elevens lösningsarbete, vilket kan minska elevens möjlighet att lära sig viktig matematik.

### 4.3 Ge återkoppling

Återkopplingen syftar till att hjälpa eleven att komma vidare i sin problemlösning genom att resonera själv. Återkopplingen måste anpassas till den ställda diagnosen eftersom den annars riskerar att ge eleven för mycket, för lite eller på annat sätt olämplig hjälp. Återkopplingen behöver så långt som möjligt bygga på elevens resonemang och anpassas till elevens matematiska kompetens, så att eleven kan resonera vidare själv. På samma sätt som för diagnosfrågorna, gäller för de återkopplingar som föreslås nedan att det inte är de exakta formuleringarna som är avgörande, utan innehållet, anpassat till eleven och situationen i övrigt. Till exempel kan samma återkoppling uttryckas med ett enklare språk anpassat till yngre barn eller med ord ni redan etablerat i klassen. Eventuella anpassningar bör inte ändra den huvudsakliga inriktningen på den för diagnosen avsedda återkopplingen, t ex att ge eleven mer hjälp än avsett eller att hoppa över den föreslagna utvärderingen av ett fel för att i stället rikta hjälpen mot skapande av en lösningssidé.

Om eleven inte kan använda lärarens återkoppling för att fortsätta ett eget resonemang kan läraren ge kompletterande återkoppling i linje med den föreslagna, på det sätt som läraren bedömer lämpligt. Det är dock vanligt att lärarens återkoppling blir en slags dialog där eleven och läraren tillsammans steg för steg arbetar sig framåt, vilket ofta leder till att eleven får för mycket hjälp och inte ges tid att tänka själv (se önskad respons nedan). Återkopplingen bör därför vara återhållsam och avgränsad till det som anges vid de specifika diagnoserna nedan.

### 4.4 Önskad respons

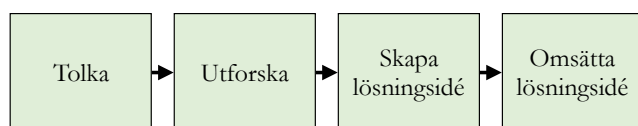
För varje diagnos finns en beskrivning av önskad respons, det vill säga vad återkopplingen hoppas få eleven att göra. Den önskade responsen har två syften: att vägleda utformning av återkoppling (en återkoppling ska alltid utgå från en diagnos och sikta mot en önskad respons) och att vägleda lärarens bedömning av när eleven kan försöka vidare själv utan mer återkoppling. Återkopplingen bör utformas så att det blir naturligt för eleven att svara genom att ge önskad respons. Till exempel bör läraren fråga "Hur skulle du kunna..." om den önskade responsen är att eleven ska ge ett förslag på strategi eller ansats, snarare än "Kan du..." eftersom det naturliga svaret på den frågan inte är ett förslag utan "Ja" eller "Nej". Detta innebär att läraren behöver ha klargjort för sig själv vad den önskade responsen är innan återkoppling ges.

Generellt är den önskade responsen från eleven efter lärarens återkoppling att eleven själv försöker resonera sig genom svårigheten. Detta kan yttra sig genom att eleven först tänker tyst ett tag, utan att synbart göra någonting. Läraren bör därför ge betänketid åt eleven innan hen avgör om önskad respons har nåtts eller om eleven behöver mer återkoppling.

Den önskade responsen avgränsas till att eleven försöker resonera sig genom den specifika svårigheten, vilket vanligtvis inte innebär att eleven löser hela uppgiften. Det är inte nödvändigt att eleven lyckas resonera sig genom svårigheten direkt. Om läraren ser att eleven har börjat reflektera eller testa något, bör hen låta eleven fortsätta med lösningsarbetet själv ett tag. Läraren bör i normalfallet inte vänta kvar medan eleven försöker. Det kan kännas naturligt att vara kvar hos eleven tills svårigheten eller hela uppgiften är löst, men det leder ofta till att läraren ger mer hjälp än nödvändigt och därmed tar över ansvaret för alltför stor del av lösningen. I stället bör läraren uppmåna eleven att försöka själv, t ex genom att säga ”nu tror jag du kan prova själv”, eventuellt kompletterat med ”räck upp handen om du behöver mer hjälp efter du försökt”. Att lämna eleven är också en signal om att läraren tror på att eleven kan ta ansvaret för att försöka ta sig vidare på egen hand. Läraren kan dessutom på så sätt få mer tid att hjälpa andra elever. Vid behov kan läraren återvända till eleven senare för att se hur det går även om eleven inte ber om hjälp.

## 5 Faser i problemlösning

Ett av guidens syften är att identifiera specifika svårigheter, eftersom olika svårigheter vid problemlösning kräver olika hjälp. Elevsvårigheter i problemlösning kan karakteriseras på olika sätt, t ex utifrån matematisk begreppsförståelse, problemlösningskompetenser eller steg i problemlösningsprocessen. Denna guide relaterar elevers svårigheter till steg i problemlösningsprocessen, eftersom det teoretiska och praktiska utvecklingsarbete som ligger bakom guiden visade att det var viktigt för att vägleda anpassning och avgränsning av hjälpen, så att den fungerar men inte blir för långtgående. Här indelas problemlösningsprocessen i fyra faser: Tolka, Utforska, Skapa lösningsidé och Omsätta lösningsidé. Faserna är en modell. I praktiken kan faserna ibland överlappa varandra och eleven kan behöva återvända till en tidigare fas. Varje delavsnitt nedan inleds med en beskrivning av vad fasen innebär, följt av en övergripande beskrivning av utmaningar elever kan möta i fasen. Specifika beskrivningar av svårigheter och återkopplingar finns i Avsnitt 7–8.



### 5.1 Tolka

Eleven tolkar information som är given i uppgiften och vad som efterfrågas. Här kan även ingå att utläsa vilket format svaret ska vara på, t ex om det räcker med kort svar eller om det behövs en utförlig redovisning av lösningen. Informationen är ofta skriftlig (text, symboler, tabeller, bilder, mm), men kan även inkludera muntlig information från läraren. Här ingår inte att skapa en lösning, även om man i praktiken ibland påbörjar det parallellt med tolkningen. Det ingår inte heller att utforska eller på andra sätt resonera sig fram till egenskaper och samband eller dra andra slutsatser som inte är uttryckligt formulerade i uppgiften, t ex hur figur 4 borde se ut i uppgiften Stenplattor. Det ingår inte heller att konstruera nya representationer av informationen i uppgiften, t ex att rita en figur. Om det däremot redan finns en figur i uppgiften så ingår det att tolka den. Det kan exempelvis ingå:

- Stenplattor: Att förstå att figurerna illustrerar ett växande mönster. Att det som efterfrågas är att hitta två olika antal (mörka och ljusa) inte det totala antalet plattor. Att fundera över hur nästa figur kan se ut hör inte till tolkning utan till senare faser.
- Ljustakar: Att förstå orden sjuarmade och femarmade.
- Cirkel: Att bilden visar en cirkel med mittpunkt O, att A, B, C och K är punkter där B, C och K ligger på cirkelns rand, att sträckan KC är linjesegmentet mellan punkterna K och C, osv. Detta är förmodligen relativt enkelt att tolka för den elev som tidigare mött

uppgifter med liknande information (geometriska kombinationer av punkter, linjer, trianglar, vinklar, cirklar, cirkelcentrum), men kan vara mycket svårt för den elev som inte tidigare gjort det. Att reflektera över vilka kända samband som kan tänkas vara användbara hör inte till tolkning utan till senare faser.

Utmaningar i tolkningsfasen kan vara att eleven inte förstår vad ett matematiskt eller vardagligt ord eller en formulering betyder, eller att eleven gör en fullständig men felaktig tolkning och försöker därmed i praktiken lösa en annan uppgift än den avsedda.

Den kanske svåraste delen i att karakterisera hur problemlösning går till rör vad som händer efter tolkningen när eleven ”kommer på” hur uppgiften ska lösas. Det är en kreativ tankeprocess som kan ske på många olika sätt, och kan vara i det närmaste ögonblicklig eller ta lång tid med många olika steg. I guidens modell uppdelas denna del i Utforska och Skapa lösningsidé, vilket kan stämma mer eller mindre väl med hur eleven faktiskt resonerar. Poängen med uppdelningen är att det i dessa faser ofta går att urskilja olika typer av svårigheter som kräver olika återkopplingar.

## 5.2 Utforska

Om eleven i tolkningsfasen förstått uppgiftens information och vad som efterfrågas, men inte direkt har en tillräckligt tydlig idé om hur uppgiften skulle kunna lösas behöver eleven utforska matematiken i uppgiften. Det innebär att eleven undersöker situationen i uppgiften för att lära sig mer om matematiska egenskaper hos t ex begrepp och samband, och försöker dra slutsatser som eventuellt kan vara användbara för att lösa uppgiften. Det ingår ofta att skapa representationer utifrån informationen i uppgiften, t ex att rita stenplattorna eller representera dem med något konkret material. Denna fas handlar alltså inte om att lista ut hur en lösningsidé ska skapas, utan att genom utforskning få en bättre känsla för vad problemet handlar om och vilka matematiska begrepp, egenskaper och samband som eventuellt i nästa fas kan användas för att skapa en lösningsidé. Exempelvis:

- Stenplattor: Att rita eller föreställa sig hur figur 4, 5 och 6 ser ut och räkna antalet ljusa och mörka plattor. Att rita olika sätt att steg för steg bygga upp den mörka ramen och den ljusa kvadraten.
- Ljustakar: Att beräkna antalet ljus för några olika fördelningar mellan femarmade och sjuarmade ljustakar. Att införa beteckningar för antalet fem- och sjuarmade ljustakar och försöka formulera samband i form av ekvationer.
- Cirkel: Införa beteckningar, hjälplinjer, markera vinklar och notera samband som kan vara användbara i denna typ av problem, t ex punkten D där förlängningen av sträckan AB skär cirkeln, sträckan KD, att vinklarna BDK och BCK är  $90^\circ$ , att vinkeln ACB är  $30^\circ$  och därmed vinkeln ACK  $60^\circ$ . Kalla cirkelns radie för  $r$  och sträckan AB för  $x$  samt försöka uttrycka andra sträckor med uttryck som innehåller  $r$  och  $x$  för att söka användbara ekvationer. Rita upp figuren i Geogebra (vilket är ganska klurigt och tvingar en att fundera över vad som bestämmer vad). I detta problem krävs troligen mycket utforskning, och det finns många saker som man kan tänkas göra som inte visar sig leda framåt.

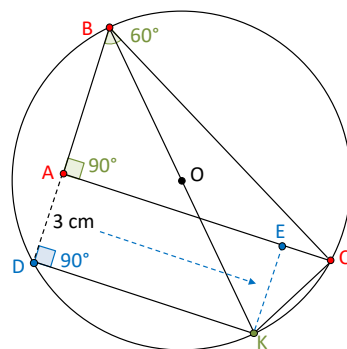
En utmaning med utforskning i problemlösning är att det ofta är svårt både för elev och lärare att veta hur det är bäst att börja, det finns ibland olika möjligheter att utforska och ingen garanti för att eleven kan dra användbara slutsatser av en viss strategi. Utforskning går ofta gradvis över från osystematiskt provande och reflekterat gissande, i meningen att eleven inte har en klar plan för om och hur det undersökta kan användas, till att efterhand närma sig bättre förståelse för uppgiften och en idé för hur den kan lösas. I problemlösning är det därför inte alltid möjligt att se var utforskning slutar och skapande av lösningsidé börjar.

Det är inte ovanligt att eleven hoppar över utforskningen för att direkt söka en lösningsmetod, utan att först ha en tillräckligt bra insikt i de matematiska egenskaper som elevens resonemang

### 5.3 Skapa lösningssidé

Skillnaden mellan att utforska och skapa lösningsidé är att det förra handlar mer om att förstå matematiken i uppgiften, dess egenskaper, relatera det till tidigare kunskaper för att söka efter sådant som eventuellt kan vara användbart, medan att skapa lösningsidé innebär att utgående från utforskningen skapa grundläggande idéer för uppgiftens lösning.

- Stenplattor: Samtliga versioner kan väsentligen lösas genom samma lösningsidé, nämligen att de mörka plattorna utgörs av fyra rader med lika många plattor som figurens nummer och fyra hörn, och att de ljusa plattorna är en kvadrat där antalet plattor längs en sida är lika många som figurnumret.
- Ljusstakar: För yngre elever kan en lösningsidé vara systematisk prövning vägledd av insikten att det blir färre ljus om jag byter ut sjuarmade mot femarmade och fler ljus om jag byter femarmade mot sjuarmade. En annan lösningsidé är att först sätta fem ljus i alla ljusstakar och dela antalet kvarvarande ljus med två för att få antalet sjuarmade. En tredje lösningsidé är att formulera och lösa ett linjärt ekvationssystem baserat på informationen i uppgiften.
- Cirkel: Att sätta ut punkten D och notera att vinkeln BDK blir rät på grund av randvinkelsatsen. Därefter parallellförflytta AD till K (se figur nedan), och forma en triangel CEK vars vinklar och sidor kan beräknas. Detta kan ses som det svåra steget i en övergripande lösningsidé även om några steg återstår, vilka borde vara välbekanta för en elev som löst flera geometriska uppgifter av liknande typ.



12

skapa lösningsidé som eleven har svårt med, eftersom dessa faser ibland går in i varandra. Det är ändå oftast värdefullt att försöka identifiera vilken av faserna eleven behöver hjälp med, eftersom den lämpliga återkopplingen är olika för olika faser. När eleven, trots en bra utforskning, inte lyckas skapa en fungerande lösningsidé behöver läraren undvika att ge för långtgående ledning och i stället stödja eleven att utgå från det eleven kommit fram till i utforskningen eller peka på att (inte hur) något specifikt hen gjort kan vara användbart för att resonera sig fram till en lösningsidé.

## 5.4 Omsätta lösningsidé

Ibland återstår lite eller inget arbete efter att en bra lösningsidé konstruerats. Ibland kan dock arbete återstå för att omsätta lösningsidén så att lösningen färdigställs och uppgiften besvaras på avsett sätt. Det kan bland annat innefatta:

- Att skapa nödvändiga representationer, figurer, formuleringar, beräkningar eller andra transformationer. För den första versionen på Stenplattor kan detta vara att formulera och utföra beräkningarna  $4+4\cdot 100 = 404$  och  $100\cdot 100=10\,000$ , för den andra versionen att formulera sambanden mellan figurnummer och antalet mörka respektive ljusa plattor i ord, och för den tredje versionen att skapa formlerna  $M=4+4x$  och  $L=x^2$ .
- Att översätta eller tolka det matematiska svaret i relation till ett verklighetssammanhang. T ex om beräkningen ger att det behövs beställas 3,3 bussar för att få plats med alla passagerare så bör svaret vara 4 bussar, medan en olämplig inom-matematisk avrundning ger att det behövs 3 bussar.
- Att vid arbete med material skapa de konkreta konstruktionerna, t ex bygga en pappersmodell av ett hus enligt beräknade mått.
- Om lösningsidén är övergripande kan det, i synnerhet i mer komplexa problem, finnas delar som behöver kompletterande resonemang. T ex att för Cirkel beräkna att  $\angle ACB$  är  $30^\circ$  och inse att randvinkelsatsen ger att  $\angle BCK$  är  $90^\circ$ , vilket tillsammans ger att  $\angle ECK$  är  $60^\circ$ , samt att detta ger att  $\triangle CEK$  är en halv liksidig triangel och att eftersom  $EK$  är 3 cm kan  $KC$  beräknas med hjälp av trigonometri eller Pythagoras sats.

I matematisk forskning kan detta bli ännu tydligare då det t ex kan ta en vecka att formulera en lösningsidé och ett år att omsätta den till ett färdigt bevis. För de problem skolelever arbetar med är det dock ofta ingen större svårighet att omsätta en bra lösningsidé och slutföra lösningen av problemet, men det kan hända att eleven fastnar i eller gör fel i denna fas.

För enkla problem, om eleven har en god förmåga att utforska eller om eleven har lite tur, kan utforskningen direkt leda rätt hela vägen till en lösning. I sådana fall kan det vara extra svårt att särskilja faserna Utforska, Skapa lösningsidé och Omsätta lösningsidé, men då uppstår heller inga svårigheter. Detta kan vara vanligare i lägre åldrar för enklare problem. Men det finns ändå en poäng med att tänka på de tre faserna, eftersom det självständiga skapandet av en lösningsidé är det som skiljer problemlösningsuppgifter från rutinuppgifter, och som kopplar samman problemlösning med centralt innehåll. Det är när eleven själv upptäcker det matematiska samband eller konstruerar det matematiska resonemang som är den grundläggande idén i lösningen som hen lär sig något nytt om det matematiska innehållet. För att stötta att eleven utvecklar egen matematisk auktoritet kan det också vara viktigt att särskilja lösningsidén och omsättandet av den; lösningsidén kan vara bra även om eleven gjort något mindre fel när hen använde den, och det kan vara bra att tydliggöra för eleven.

## 6 Två huvudtyper av svårigheter

När läraren har ställt diagnosfrågorna och samlat information om elevens svårighet, behöver läraren använda informationen för att försöka avgöra om guiden är tillämplig i aktuellt fall och i så fall vilken specifik svårighet eleven behöver hjälp med. Det första läraren behöver avgöra är vilken av två huvudsakliga typer av svårigheter det rör sig om:



- **Kört fast:** Eleven har inte gjort något avgörande fel men kört fast i sitt resonemang, och behöver hjälp med att komma framåt genom att påbörja eller genomföra en fas.
- **Fel/osäker:** Eleven har gjort något fel eller blivit osäker på om det hen gjort är rätt eller fel. Eleven behöver hjälp att titta bakåt och utvärdera om det hen gjort är rätt eller fel och varför.

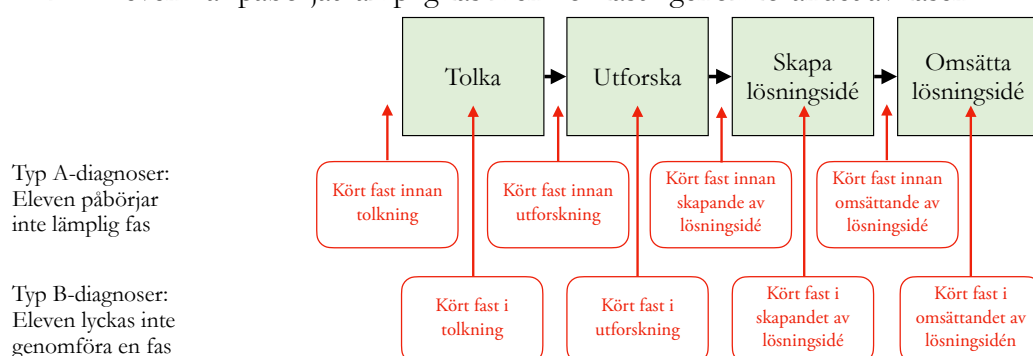
Beroende på vilken huvudsaklig typ av svårighet eleven behöver hjälp med, är det olika saker läraren behöver fundera på härnäst. Detta beskrivs i avsnitten nedan.

## 6.1 Kört fast (A–B)

När eleven har kört fast och behöver hjälp att komma vidare behöver läraren avgöra hur långt eleven kommit i problemlösningsprocessen, och därmed vad nästa steg för eleven kan vara. Detta är avgörande om lärarens återkoppling inte ska avslöja onödigt mycket av resten av lösningen.

Inom denna typ av svårighet finns två varianter:

- Eleven har kört fast innan en fas, dvs hen påbörjar inte lämplig fas för att komma vidare.
- Eleven har påbörjat lämplig fas men kör fast i genomförandet av fasen.



Om det är svårt att avgöra hur långt eleven har kommit är det bättre att ställa en tidigare än en senare diagnos. Om en för tidig diagnos ställs blir resultatet bara att eleven behöver ytterligare stöd för att komma vidare, men om en för sen diagnos ställs finns en risk att lärarens hjälp blir för långtgående och tar över för mycket ansvar från eleven. I vissa fall riskerar dock en för tidig diagnos att medföra en återkoppling som får eleven att starta om från början och överge ett bra resonemang som kunde byggas vidare på. Det är därför viktigt att genom diagnosfrågor ta reda på så mycket som möjligt om elevens befintliga resonemang och använda det när diagnosen ställs och återkopplingen anpassas till situationen.

### 6.1.1 Eleven påbörjar inte lämplig fas (A)

Svårigheter med att påbörja en fas handlar om att eleven har kört fast i övergången mellan faser eller har svårt att påbörja fasen Tolka. Här handlar elevens svårighet inte om att genomföra fasen, utan om att fatta beslut om att välja lämplig fas och försöka påbörja den. Termen ”välja” ska här ses i bred mening, och kan inkludera mer eller mindre välgrundade val, gissningar eller andra försök att komma vidare. Text att efter tolkning välja mellan att göra en noggrann utforskning genom att rita och undersöka flera figurer, eller att direkt testa en känd lösningsmetod. Denna svårighet handlar alltså om att man ska göra något och vilken fas som bör påbörjas, men inte hur man ska genomföra fasen.

Svårigheterna kan t ex bero på att eleven är van att i huvudsak arbeta med rutinuppgifter där stegen i lösningen är givna på förhand, vilket i sin tur kan leda till att eleven är omotiverad eller saknar färdigheter för att påbörja lämplig fas. Det är viktigt att eleven får utmanas och tränas i att resonera sig fram i detta val, därför bör läraren vid denna diagnos inte leda in eleven på hur fasen kan genomföras (vilket rör svårighet B nedan). Det kan också vara så att problemet i sig är så utmanande även för en driven och skicklig problemlösare, att det behövs göras flera omtag med



nya initieringar av faser, t ex efter att en lösningssidé visat sig inte fungera och eleven behöver påbörja en ny utforskning.

### 6.1.2 Eleven lyckas inte genomföra en fas (B)

Efter att eleven påbörjat en lämplig fas kan nästa utmaning, i synnerhet för svårare problem, bli att genomföra fasen. Denna svårighet handlar alltså om hur fasen ska genomföras. T ex att i utforskning inte veta hur man ska undersöka figurer och försöka dra slutsatser, eller att i skapande av lösningssidé inte se vad som kan användas av det man gjort i utforskningen.

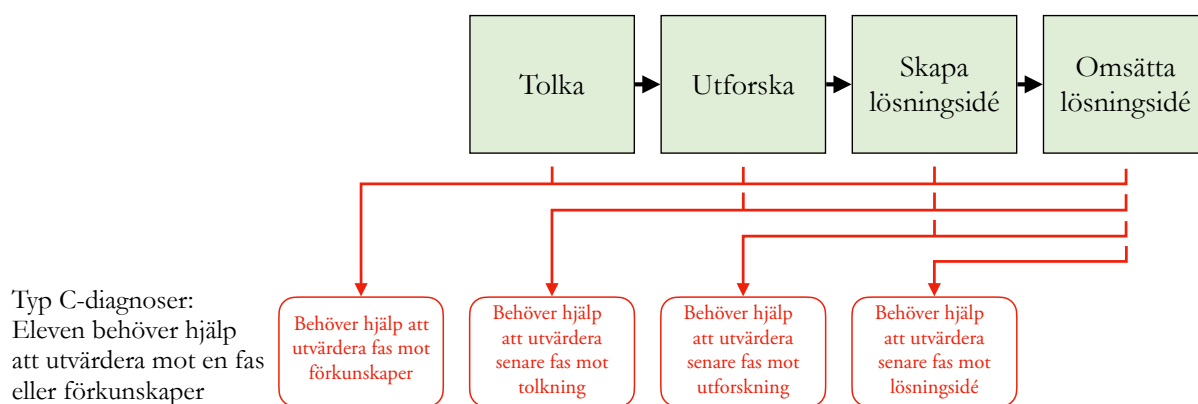
För att genomföra utforskning används vanligtvis olika problemlösningstrategier. Även om eleven valt en lämplig strategi (t ex rita figur, dela upp lösningen i steg, se Strategier ovan), kanske eleven bara har en generell kunskap om den och har svårt att konkretisera den för en specifik uppgift. Även en lämpligt vald ansats garanterar alltså inte att eleven klarar att genomföra den.

## 6.2 Fel/osäker (C–E)

När eleven har gjort fel eller är osäker på om den hen gjort är rätt eller fel behöver eleven hjälp att utvärdera hela eller delar av sin lösning. Att utvärdera ses här som en specifik del i att reflektera över problemlösningssprocessen, som innebär att identifiera och förstå eventuella fel. Jämfört med hjälp när eleven kört fast och behöver komma framåt, handlar hjälp med utvärdering om att få eleven att blicka bakåt på det som eleven hittills gjort. Utvärdering innefattar både att leta efter potentiella fel och att förstå varför något är fel. Utvärdering innebär inte att eleven passivt går igenom vad som gjorts, utan att med matematiska argument försöka motivera eller förkasta varför lösningsförsöket kan leda till det som efterfrågas i uppgiften. Här behöver läraren avgöra vad eleven behöver hjälp att utvärdera och vad det ska utvärderas mot, dvs vad eleven kan jämföra det som är fel/osäkert med (se avsnitt med specifika utvärderingsdiagnoser nedan).

Inom svårigheter med utvärdering finns tre varianter:

- C. Eleven behöver hjälp med att utvärdera något mot en specifik fas eller mot sina förkunskaper. Detta är den vanligaste utvärderingssvårigheten och innehåller flera undervarianter, se nedan.
- D. Eleven är fortsatt säker på att allt är rätt, fastän eleven har gjort fel och generell eller C-återkoppling har getts.
- E. Eleven är fortsatt osäker på om hen har gjort rätt, trots att det är rätt och eleven redan har argumenterat väl för sin lösning.



### 6.3 Prioritering om eleven både gjort fel och kört fast

Ibland har eleven både gjort fel och kört fast, vilket kan vara mer eller mindre kopplat till varandra. Det kan innefatta situationer där eleven kört fast på grund av att hen gjort fel (eller blivit osäker på om det är rätt eller fel), exempelvis:

- Ljusstakar: eleven formulerar ett felaktigt ekvationssystem som blir för svårt att lösa och hen kör fast.
- Stenplattor, version 1: eleven har gjort ett felaktigt val att rita upp figur 100 men stannar upp då hen inser att figuren inte kommer få plats på pappret och blir osäker på om det är en bra metod eller ej.

Det kan även innefatta situationer där eleven har kört fast utan att det har något samband med fel som hen gjort, exempelvis:

- Stenplattor, version 3: eleven har räknat fel på antalet mörka plattor i vissa figurer, och har kört fast då hen inte vet hur hen ska göra en formel för antalet ljusa plattor som ökar med olika mycket mellan varje figur.

När eleven både gjort fel och kört fast prioriteras i normalfallet alltid att hjälpa eleven med felet först (dvs hjälp med utvärdering), för att därefter se om eleven själv kan försöka komma vidare ur fastkörningen själv. Exempelvis:

- Ljusstakar: om eleven ovan förstår varför ekvationssystemet är felaktigt kan hen kanske samtidigt se hur ett korrekt ekvationssystem bör formuleras.

Om hen inte klarar att fortsätta själv, ställs ny diagnos att eleven kört fast och behöver hjälp med det (dvs med att välja eller genomföra fas). Exempelvis:

- Stenplattor, version 3: även om eleven ovan upptäcker att hen räknat fel på antalet mörka plattor, kan hen fortfarande ha kört fast i skapandet av en formel för antalet ljusa plattor.

Denna prioritering kan undantagsvis frångås om felet är marginellt samtidigt som den väsentliga svårigheten är att eleven kört fast av skäl som inte beror på felet, eller om läraren bedömer att eleven själv troligen upptäcker felet om hen fortsätter framåt. Notera även att fel som beror på bristande Resurser ibland kan avhjälpas på andra sätt (se avsnitt Resurser ovan).

## 7 Kört fast

I detta avsnitt beskrivs specifika diagnoser och återkopplingar för när eleven har kört fast, men inte har gjort något fel och inte är osäker på om något är rätt eller fel. Numreringen 1A, 1B etc. hänvisar till cellernas numrering i översiktsbladet sist i guiden, där 1–4 är numreringen av faserna och A–B beteckningar på typer av svårigheter. När läraren konstaterat att eleven kört fast bör en generell återkoppling provas först (oavsett om läraren ställt en mer specifik diagnos eller ej):

### 7.1 Kört fast, generell diagnos AB

**Diagnos** Eleven har kört fast och kommer inte vidare i sin lösning. Det behöver för denna diagnos inte klargöras i vilken fas eleven kört fast, eftersom den gäller för alla fyra faser.

**Generell återkoppling** Fråga eleven:

- i) ”Hur tror du att du skulle kunna komma vidare? Prova det!”

Eleven bör uppmanas prova sitt förslag om det är rimligt, även om läraren bedömer att det inte är den bästa vägen framåt. Om eleven inte har något rimligt förslag ställer läraren en mer specifik diagnos nedan som tar hänsyn till var i sin lösning eleven har kört fast. Det kan också finnas tillfällen då det är lämpligt att gå direkt till att ställa en specifik diagnos nedan, utan att ge den generella återkopplingen först.

**Önskad respons** Eleven börjar prova sitt eget förslag. Det är inte nödvändigt att se att förslaget leder hela vägen fram till en lösning.

## 7.2 Eleven påbörjar inte tolkning 1A

**Diagnos** Eleven försöker inte tolka uppgiften. Antingen genom att inte ens läsa uppgiften, eller genom att läsa ytligt och ge upp direkt utan att egentligen försöka förstå informationen och vad som efterfrågas.

**Återkoppling** Ställ frågor till eleven för att hjälpa eleven att påbörja tolkning. Välj den fråga som passar situationen och följ upp med den andra om lämpligt:

- i) "Vad är det du ska ta reda på?"
- ii) "Vad får du veta i uppgiften?"

Om eleven inte kan svara på frågorna kan läraren uppmuntra eleven att läsa uppgiften högt eller, om läraren bedömer det mer lämpligt, läsa uppgiften högt för eleven och ställa frågorna igen.

**Önskad respons** Eleven genomför korrekt tolkning. Eftersom avsikten med de flesta problem inte är att eleven ska ägna mycket tid åt tolkning utan fokusera utforskning och skapande av lösningsidé, bör lärarens hjälp nå så långt att eleven inte bara påbörjar tolkning, utan också genomför den. Läraren kan gärna vänta lite med att lämna eleven för att se om hen påbörjar utforskning, om inte ställs ny diagnos 2A.

## 7.3 Eleven lyckas inte genomföra tolkning 1B

**Diagnos** Eleven försöker men fastnar i själva genomförandet av tolkningen. Det kan visa sig i att eleven har en fråga om någon del av uppgiftsformuleringen. Exempelvis:

- **Ljusstakar:** Eleven säger "Det finns 29 ljusstakar på slottet. Sen vet jag inte. Jag fattar inte vad det står."
- **Ljusstakar:** Eleven frågar: "Vad betyder 'femarmade'?"

Eleven förstår alltså inte vad uppgiftsformuleringen eller en del av den betyder. Det kan till exempel bero på att eleven har språksvårigheter eller att uppgiften är oklart formulerad.

**Återkoppling** Denna typ av svårighet kan eleven normalt inte lösa genom att resonera själv, så läraren bör hjälpa eleven genom att förklara det eleven inte förstår. Hjälpen ska bara gälla själva tolkningen: läraren bör inte leda in eleven på någon av de övriga faserna eller på annat sätt hjälpa eleven med mer än själva betydelsen av informationen. Till exempel:

- "Ok, jag läser för dig: 'Det finns 29 ljusstakar på slottet.' Det var du med på vad det betydde?" Efter elevens svar: "Vissa ljusstakar är femarmade och andra är sjuarmade: Vad betyder det?" Om eleven inte vet: "Det är såna ljusstakar som det kan sitta flera ljus i, man kallar det för att det går ut armar så här [visa eller rita]. Är du med på vad det betyder då?" Efter elevens svar: "Till alla ljusstakarna sammanlagt går det åt 187 ljus." Vad betyder det?" Efter elevens svar: "Och så är frågan: 'Hur många ljusstakar finns det av varje sort?' Fundera lite på det."
- "Femarmad är att det är en ljusstake som man kan sätta fem ljus i, man kallar det för armar som går ut så här [visa eller rita]."

**Önskad respons** Eleven genomför korrekt tolkning. Läraren kan gärna vänta lite med att lämna eleven för att se om hen påbörjar utforskning, om inte ställs ny diagnos 2A.

## 7.4 Eleven påbörjar inte utforskning 2A

**Diagnos** Det framgår att eleven inte har påbörjat någon utforskning (svarar t ex "jag vet inte hur jag ska börja" eller "ingenting" på diagnosfråga I), och det framgår att hen förstått informationen i uppgiften, t ex utifrån elevens svar på återkoppling för 1A. Eleven har alltså gjort en bra tolkning av uppgiften men fastnat efter tolkningen.

**Återkoppling** Återkopplingen bör för denna diagnos hållas allmän och riktas mot att hjälpa eleven att välja hur hen ska börja använda informationen i uppgiften. Återkopplingen bör inte riktas mot att finna en lösningsidé, speciellt bör steg i lösningsmetoden inte ges. Välj den fråga som passar situationen, och följ upp med flera om lämpligt:

- i) "Vilka strategier kan du använda för att utforska problem? Prova någon av dem!" Om ni i klassen tidigare har diskuterat och sammanställt strategier kan du också hänvisa till dem och

fråga ”Kan du prova någon av de strategierna?”. Här ingår bara att ställa denna öppna fråga, först vid diagnos 2B kan specifika strategier föreslås.

- ii) ”Vad vet du om [hänvisa till något som nämns i uppgiftstexten]?” Frågan kan röra begrepp, symboler, beteckningar, mm. Frågan ska inte riktas mot lösningsmetoder, till exempel ”Vad vet du om att lösa ekvationssystem?”

**Önskad respons** Eleven väljer själv en strategi eller ett sätt att utforska matematiska egenskaper och samband baserat på sitt eget resonemang. Här ingår inte nödvändigtvis att eleven genomför utforskning, utan det räcker med att eleven börjar försöka själv. Om eleven försöker, men efter ett tag kör fast igen, blir det en ny diagnos: 2B, med nya förslag till återkoppling.

## 7.5 Eleven lyckas inte genomföra utforskning 2B

**Diagnos** Elevens svar på diagnosfråga I (eller motsvarande information) visar att hen har försökt utforska men inte hittat någon lämplig strategi, eller ett lämpligt sätt att tillämpa en strategi. Eleven kan även ha dragit några slutsatser om matematiska egenskaper och samband hos den uppgiften handlar om, men inte tillräckligt för att skapa en lösningssidé. Det kan även vara så att eleven har utvärderat en tidigare utforskning, identifierat ett behov av att göra utforskning på annat sätt men inte lyckats. Exempelvis:

- **Stenplattor, version 2:** Eleven har skrivit par av tal – 9 16, 16 20, 100 44 – på lite olika ställen, men inte märkt ut vilken figur uträkningarna hör till. Eleven berättar: ”Man ska hitta ett knep för att räkna ut vilken figur som helst. Jag har testat lite, men jag kommer inte på något.”
- **Ljustakar:** Eleven har ritat en femarmad och en sjuarmad ljustake. Eleven berättar: ”Man ska ta reda på hur många ljustakar som har fem armar och hur många som har sju. Jag testade att rita, men nu vet jag inte hur jag ska göra.”
- **Ljustakar:** Eleven har skrivit upp sambandet  $x + y = 29$  och säger att hen inte kommer vidare.
- **Cirkel:** Eleven ritar en liten skiss för hand och drar sträckor mellan alla par av punkter, och gör ingen ansats att söka mer specifika samband som kan användas för att lösa problemet.
- **Cirkel:** Eleven skriver in värden för ytterligare några vinklar i figuren (t ex BCA) men drar inte ytterligare linjer mellan de punkter som ges i uppgiften.

**Återkoppling** Här bör återkopplingen se olika ut beroende på om eleven redan påbörjat lämplig strategi eller ej.

- i) Om eleven inte redan börjat använda en lämplig strategi, föreslå en generell strategi som kan hjälpa eleven att utifrån sin matematiska kompetens och sitt tidigare resonemang undersöka uppgiftens egenskaper. Läraren behöver här bedöma vilka generella strategier som kan vara lämpliga för eleven att utforska uppgiften. Några förslag är:
- ”Använd [konkret material].” Här bör läraren föreslå något material som lämpar sig för uppgiften, så att eleven kan konkretisera uppgiftens matematiska egenskaper och relatera sitt resonemang till dessa egenskaper.
  - ”Rita en [bild/figur/graf/tallinje/liknande].” Här bör läraren föreslå någon visuell representation som kan hjälpa eleven att identifiera egenskaper eller samband mellan olika delar. Det kan till exempel hjälpa att eleven ritar en uppsättning olika ljustakar för att få en uppfattning hur totala antalet ljus hänger samman med val av ljustakar.
  - ”Inför [beteckningar/symboler/variabler/en tabell/liknande].” För vissa problem kan detta hjälpa till att strukturera genomförandet av utforskningen och få bättre överblick över sitt resonemang. Det kan till exempel hjälpa att för **Stenplattor** införa beteckningar för olika delar av figurerna såsom hörn, kanter och ram, eller beteckningar på kända och okända vinklar och längder i **Cirkel**.
  - ”Skriv ner det du vet och vad du ska ta reda på.” Det kan vara användbart för uppgifter med mycket text eller uppgifter som innehåller flera steg. Syftet är inte att eleven ska

försöka minnas en fullständig lösningsmetod (vilket inte fungerar för problem), utan få bättre struktur och överblick kring sådant som kanske kan vara användbart i utforskningen.

- ”Prova några olika exempel.” Denna strategi kan till exempel fungera för problem där man ska hitta vilka värden som uppfyller givna villkor. Till exempel kan det hjälpa att testa några olika antal fem- och sjuarmade ljusstakar för att försöka dra slutsatser om samband mellan olika antal ljusstakar och totala antalet ljus.
- ”Testa ett enklare exempel.” Denna strategi kan till exempel fungera för problem där man ska upptäcka ett mönster. Till exempel kan det hjälpa att försöka lista ut hur många stenplattor som behövs för figur 4 eller 10 utan att rita och räkna. Det kan leda till slutsatser som kan användas för att utforska den egentliga uppgiften eller användas direkt för att i nästa fas skapa en lösningssidé.

Läraren bör inte utförligt beskriva hur detta specifikt bör göras, utan bara föreslå den generella strategin så att eleven själv får fundera över hur den kan användas. Om eleven inte kommer framåt, bör läraren föreslå en annan generell strategi om det finns en lämplig sådan. För fall där eleven valt en mindre lämplig strategi för utforskning är det rimligt att fråga eleven om andra strategier innan läraren föreslår en. Elever som är ovana vid att använda generella strategier kan ha svårt att använda den här typen av återkoppling eftersom eleven behöver kunna en hel del för att använda en matematisk strategi. För till exempel ”rita” behöver eleven, utöver själva ritandet som de flesta barn kan, kunna rita så att det ritade representerar matematiken i uppgiften och kan användas som underlag för matematiska resonemang. Här kan det därför ibland vara motiverat att specificera vad en strategi innebär.

- ii) Om eleven har börjat använda en lämplig strategi, men kört fast i ett steg av strategin, kan läraren specificera hur just detta steg ska genomföras. Det kan även innefatta att läraren ger en avgränsad hint om vilken del av strategin som behöver utvecklas eller modifieras. Det ska dock finnas kvar tillräckligt mycket av själva utforskningen (och skapande av lösningssidé) för att eleven ska behöva konstruera ett eget resonemang. En generell formulering kan inte ges eftersom återkopplingen måste vara formulerad specifikt för situationen. Exempelvis:

- Ljusstakar: Föreslå att eleven tar med antalet femarmade, antalet sjuarmade och det totala antalet ljus i sin tabell. Lämna åt eleven att utforska hur sambanden mellan ljusstakarna och antalet ljus förhåller sig till villkoren i uppgiften.
- Cirkel: Om eleven har ritat ett antal linjer i figuren men saknar systematisk strategi för att undersöka samband, föreslå att eleven provar sig fram med att bilda trianglar. Lämna åt eleven att utforska vilka trianglar som bör bildas och vilka egenskaper hos dessa som ska undersökas, även om det innebär att eleven kommer att undersöka en del trianglar som inte leder närmare en lösning.

Om ingen av återkopplingarna ovan fungerar efter det att eleven fått försöka själv ett tag kan problemet eventuellt vara så svårt för eleven att hen inte kan göra framsteg med hjälp av eget resonemang. Guiden ger ingen ytterligare vägledning för denna situation, utan läraren får bedöma hur det då är lämpligt att hjälpa eleven.

Önskad respons Eleven påbörjar eller fortsätter utforskningen genom att prova en lämplig strategi och med eget resonemang undersöka uppgiftens matematiska egenskaper. Eftersom strategin är generell är det inte garanterat att eleven kan genomföra utforskningen, men det räcker med att eleven kommit i gång med utforskning för att läraren ska kunna lämna eleven att försöka själv.

## 7.6 Eleven påbörjar inte skapa lösningssidé 3A

Diagnos Elevens svar på diagnosfråga I och II (eller motsvarande information) har visat att hen genomfört en tillräcklig utforskning av uppgiften men inte försökt skapa en lösningssidé. Eleven ska alltså ha formulerat samband och egenskaper, provat exempel, och/eller skapat



representationer som är tillräckliga för att skapa en lösningsidé, men inte överblickat och analyserat det hen gjort för att se om det kan ge underlag för en lösningsidé. Exempelvis:

- Stenplattor: Eleven ber om hjälp och berättar att hen har kört fast. Eleven har ritat figur 4–10 och beräknat antalet ljusa och mörka plattor i figurerna, men kommer inte vidare.
- Ljusstakar: Eleven har testat med 10 sjuarmade och 19 femarmade, vilket gav 165 ljus, och med 10 femarmade och 19 sjuarmade, vilket gav 183 ljus. Eleven säger: ”Det går inte. Jag har testat med 10 femarmade och 10 sjuarmade, men det fungerar inte.”

Återkoppling När eleven svarar på diagnosfrågor kan hen ibland självant reflektera över sitt hittillsvarande försök och själv komma på nya idéer att arbeta vidare med. Elevens svar på diagnosfrågor är dock ofta alltför kortfattade och översiktliga för att främja denna reflektion. När eleven kört fast efter utforskning bör eleven uppmanas att mer detaljerat prata genom det hen hittills har gjort och förklara vad hen gör. Återkopplingen görs genom att uppmana eleven att gå igenom det hen gjort i utforskningen noggrant:

- i) ”Jag ser att du har gjort flera saker här. Berätta!”

Följ vid behov upp med frågor som efterfrågar detaljerade beskrivningar och förklaringar, t ex ”Vad står det här?”, ”Hur kom du fram till det?”, ”Hur räknade du ut det?”, ”Vad betyder det?”, ”Varför har du gjort det?” som ytterligare stöd för eleven att vara noggrann i sin genomgång.

Uppföljningsfrågorna ska sikta mot att eleven ger en matematiskt sammanhängande beskrivning så att läraren inte själv behöver fylla i luckor genom att anta vad eleven tänkt. Till exempel:

- Stenplattor: Om eleven dragit korrekta slutsatser från några exempel utan att ännu ha skapat någon lösningsidé kan det hjälpa eleven att se hur beräkningarna är uppbyggda om hen beskriver sina beräkningar högt. Eleven kan alltså upptäcka vad det är som är samma i varje beräkning och vad det är som varierar, och därmed dra slutsatser om en möjlig beräkningsmetod för ett högre figurnummer.
- Cirkel: Om eleven beskriver de olika saker hen kommit fram till, hur hen kommit fram till dem och vad de betyder, kan det leda till att eleven själv inser att det är något av dem som kan användas för att börja skapa en lösningsidé.

Frågorna syftar enbart till att eleven ska beskriva vad hen redan tänkt, och ska inte vara formulerade för att leda in eleven på specifika spår, metoder eller steg i lösningsidén. Frågorna liknar diagnosfrågorna men de används för olika syften: Diagnosfrågorna är medel för läraren att samla in information om elevens tänkande för att ställa en diagnos, medan återkopplingen här görs efter diagnos är ställd och syftar till att få eleven att själv börjar reflektera över vad hen har gjort.

Önskad respons Eleven går noggrant genom hela sin utforskning, vad hen gjort och vad det betyder, och finner något hen kan använda för att börja skapa en lösningsidé. Det är inte nödvändigt att eleven direkt konstruerar en sådan idé. Om eleven noggrant går genom hela sin utforskning men inte finner något hen kan använda blir det en ny diagnos, 3B, med nya förslag på återkopplingar. Det kan även vara så att det visar sig att lärdomarna från utforskningen var otillräckliga och att en kompletterande eller ny utforskning bör göras, vilket ger en ny diagnos 2B.

## 7.7 Eleven lyckas inte genomföra skapa lösningsidé 3B

Diagnos Elevens svar på diagnosfråga I och II (eller motsvarande information) har visat att hen genomfört en tillräcklig utforskning av uppgiften och börjat försöka skapa en lösningsidé. Eleven ska alltså ha formulerat samband och egenskaper, provat exempel, och/eller skapat representationer som är tillräckliga för att skapa en lösningsidé, och börjat försöka överblicka och analysera det hen gjort för att se om det kan ge underlag för en lösningsidé. Det kan även vara så att eleven har utvärderat en tidigare lösningsidé, identifierat ett fel och förstått anledningen till felet, och nu inte lyckas revidera lösningsidén till en fungerande idé. Exempelvis:

- Stenplattor, version 3: Eleven har ritat och räknat antalet plattor för figur 4–6 och sett att det är 4 mörka plattor mer för varje figur, och har insett att  $4x$  inte fungerar som formel, men vet nu inte hur hen ska gå vidare.

- Ljustakar: Eleven har formulerat två ekvationer men kommer inte ihåg att de kan lösas som ett ekvationssystem.
- Cirkel: Eleven har använt randvinkelsatsen för att markera att vinklarna BDK och BCK är  $90^\circ$  (vilket kan användas i en lösning), men eleven har även ritat in många andra vinklar, variabler, hjälplinjer och kan inte identifiera vad som är användbart.

Återkoppling Rikta elevens uppmärksamhet mot något specifikt som hen beskrivit i tolkning av uppgiften, eller kommit fram till i utforskning eller utvärdering av en felaktig lösningsidé, som kan användas för att komma vidare i skapandet av lösningsidé. Till exempel genom formuleringen:

- i) "Du sa att [något eleven beskrivit]. Försök att använda det för att lösa uppgiften." För exemplen ovan skulle detta kunna formuleras:
  - Stenplattor, version 3: "Du säger att det ökar med fyra plattor för varje figur och du vet hur många plattor det är i figur 4, 5 och 6. Försök använda det för att lösa uppgiften."
  - Ljustakar: "Du säger att du har en ekvation för hur många ljustakar det är totalt och en för hur många ljus det är totalt. Försök använda dem för att lösa uppgiften."
  - Cirkel: "Du säger att BDK och BCK är  $90^\circ$ . Försök använda det för att lösa uppgiften."

Det är viktigt att återkopplingen endast pekar ut saker som kan vara användbara, och inte beskriver hur det kan användas vilket eleven bör försöka komma på själv. Återkoppling som riktas mot att genomföra en metod eller steg i metod, dvs vad som ska göras eller hur det ska göras, bör inte ges. Dels eftersom det fråntar eleven ansvaret att komma på lösningsmetoden, dels eftersom det ofta leder till att eleven oreflekterat gör som läraren säger och sedan kanske kör fast igen. Exempel på sådana återkopplingar som **inte** bör ges är:

- Stenplattor: "Dela upp din tabell och gör en formel för ljusa och en för mörka."
- Ljustakar: "Lös ut y ur ekvationen  $x + y = 26$  och sätt in uttrycket för y i den andra ekvationen."
- Cirkel: "Försök hitta en linje som du kan parallellförflytta."

Önskad respons Eleven börjar eller fortsätter försöka skapa en lösningsidé som bygger på matematiska egenskaper och samband funna vid utforskningen. Läraren kan lämna eleven, även om inte eleven nått ända fram.

## 7.8 (Eleven påbörjar inte omsätta lösningsidé 4A)

Den elev som kommit så långt att hen har en bra lösningsidé går normalt vidare mot att försöka omsätta den. Därför är denna diagnos i praktiken så ovanlig att återkopplingsförslag för den inte ingår i guiden.

## 7.9 Eleven lyckas inte genomföra omsätta lösningsidé 4B

Diagnos Elevens svar på fr a diagnosfråga II (eller motsvarande information) har visat att hen har en bra lösningsidé, och svaret på diagnosfråga I (eller motsvarande information) visar att eleven försökt börja omsätta idén och slutföra lösningen men inte lyckats.

I de exempel på denna svårighet vi har sett finns två huvudsakliga orsaker till svårigheter med att omsätta lösningsidén:

- i) Metoden kan ses som en algoritmisk standardprocedur, men eleven kan den inte alls eller tillräckligt väl. Till exempel:
  - Stenplattor, version 3: Eleven kan förklara i ord hur antalet ljusa och mörka plattor kan beräknas, men vet inte hur det ska skrivas som en formel.
  - Ljustakar: Eleven vet att hen ska lösa ett ekvationssystem men minns inte några metoder för det.
  - Cirkel: Eleven kan inte använda förhållandet mellan KC och AD för att beräkna KC. Eleven kan inte beräkna KC utifrån att triangeln har en vinkel  $90^\circ$  och en vinkel  $60^\circ$ .

Läraren kan då (se avsnitt 3.1) välja mellan att:

- a. Inte tillämpa guiden utan beskriva metoden så utförligt att eleven kan genomföra den.
  - b. Stödja eleven att resonera sig fram till metoden eller annat sätt att omsätta lösningssidén. Detta blir då ett ”delproblem i problemet” och elevens svårighet faller då under någon av de andra diagnoserna i guiden.
- ii) Eleven är omotiverad eller trött och orkar inte slutföra beräkningarna trots att de inte är svåra för eleven. Läraren kan försöka med allmän uppmuntran. Om det inte räcker är det troligen inte rimligt att stödja elevens egna resonemang, och guiden är inte tillämpbar.

I och med detta finns det därför inte något behov av specifik återkoppling för 4B. Eftersom den önskade responsen blir olika beroende på vad läraren väljer formuleras heller ingen sådan.

## 8 Fel/osäker

När eleven har gjort ett fel eller är osäker på om det hen gjort är rätt eller fel behöver eleven hjälp att utvärdera. Utvärdering kan röra hela lösningen eller en specifik del av den. Diagnoserna och återkopplingen fokuserar svårigheter som rör centrala delar i lösningen och hur olika delar är relaterade till varandra (t ex hur lösningssidén bygger på utforskningen och om den svarar mot det som efterfrågas i uppgiften), inte mindre slarv- och beräkningsfel. Även efter det att eleven själv har utvärderat felet – identifierat och förstått det – är det inte självklart att eleven kommer vidare. Sådana situationer räknas inte som utvärderingssvårigheter utan som att utvärderingen är avklarad och att eleven därefter har kört fast, vilket leder till en ny diagnos, av typen A eller B. Det är viktigt att återkoppling för svårigheterna C–E nedan avgränsas till att hjälpa eleven utvärdera, inget annat, och att eleven efter att utvärderingen är klar själv får försöka komma vidare med lösningen.

Det finns flera olika situationer där eleven behöver utvärdera. Dels kan det handla om situationer där eleven inte själv ser något behov av utvärdering, exempelvis:

- Läraren har identifierat ett fel i lösningen, men eleven själv tror att allt är rätt. T ex att för Stenplattor, version 1 ha ritat och beräknat antalet plattor för figur 4 och 5, sedan tagit resultatet för figur 5 multiplicerat med 20 och då säga sig ha löst uppgiften.
- Eleven har löst uppgiften (kanske korrekt) utan att motivera eller förklara sin lösning, och vill att läraren ska bekräfta att det är rätt. Att be läraren bekräfta ses här som att eleven är osäker. T ex för Ljusstakar säga ”Det är 8 femarmade och 21 sjuarmade, va?” utan att ha skrivit ner något och som svar på diagnosfråga I säga ”Jag tänkte bara.”

Dels kan det handla om situationer där eleven själv ser ett behov av utvärdering, men ändå inte utvärderar, exempelvis:

- Eleven är osäker på om lösningen är rätt eller fel och vill att läraren ska avgöra detta.
- Eleven ser att någonting i lösningen är fel, men inte vad. T ex att för Cirkel fått fram att KC är 12 cm och förstått att det är orimligt, men inte kunnat identifiera vad i lösningen som är fel.

När läraren konstaterat att eleven gjort fel eller är osäker bör en generell återkoppling provas först (oavsett om läraren ställt en mer specifik diagnos eller ej):

### 8.1 Fel/osäker, generell diagnos CDE

**Diagnos** Eleven har gjort fel eller är osäker på om något hen gjort är rätt eller fel. Det behöver för denna diagnos inte klargöras vad eleven kan utvärdera mot.

#### Generell återkoppling

- i) ”Du säger att: [upprepa det eleven säger sig vara osäker på eller det eleven sagt som du vill att hen utvärderar]. Hur kan du själv kontrollera om det stämmer?”



För att kunna ge återkopplingen behöver alltså eleven ha sagt eller skrivit något som kan utvärderas, och läraren behöver ha uppmärksammat det. För att eleven ska förstå vad läraren vill att eleven ska utvärdera behöver detta uttryckligen sägas. Det räcker alltså inte att bara säga frågan på slutet. Använd ett uttryck för ”utvärdera” som eleven förstår, till exempel ”kontrollera att det stämmer”.

**Önskad respons** Eleven ger ett förslag på hur felet eller osäkerheten kan utvärderas och påbörjar med eget resonemang en utvärdering av felet eller osäkerheten, som kan leda till att eleven klargör vad som är fel eller oklart och de matematiska orsakerna till varför det är så. Det kan t ex innefatta att eleven ger uttryck för osäkerhet och börjar tänka ”Jaha, men vänta...” eller att eleven uttrycker mer specifika idéer om hur utvärdering kan göras. Vissa typer av utvärdering (t ex att lösa uppgiften på ett annat sätt) kan ta lång tid, men det räcker att läraren ser att eleven kommer i gång.

Om den generella återkopplingen inte utgör tillräcklig hjälp till eleven behöver ytterligare återkoppling ges, se nedan. Sådan återkoppling bör liksom den generella återkopplingen ovan hänvisa till vad eleven ska utvärdera (gärna med elevens egna formuleringar) och uttryckligen fråga eleven hur hen kan utvärdera detta, men därutöver också peka ut något eleven kan använda för utvärdering. Om eleven har en slutsats, idé eller svar, eller gjort något annat som är fel eller som eleven är osäker på, behöver en utvärdering i allmänhet göras genom att eleven jämför det som ska utvärderas med något som framkommit vid tolkningen, i utforskningen eller i skapandet av en lösningssidé. Ibland behöver jämförelsen göras med vad eleven redan vet om matematik. Det medför att de specifika utvärderingsdiagnoserna nedan är formulerade i förhållande till vad eleven behöver utvärdera mot, oavsett vilken fas felet eller osäkerheten hör till.

Det kan verka rimligt att det skulle hjälpa eleven bättre att även *föreslå hur* eleven ska utvärdera. Det har dock visat sig oftast leda till att eleven använder lärarens förslag för att lösa uppgiften på det föreslagna sättet, utan att utvärdera sin egen lösning. Det kan också verka rimligt att ställa specifika frågor om elevens lösning, som skulle kunna leda till att eleven börjar tänka kritiskt på den. Men det har visat sig sällan leda till kritisk reflektion hos eleven, utan till att eleven bara svarar på frågan.

## 8.2 Eleven behöver utvärdera mot uppgiftsformuleringen 1C

**Diagnos** Eleven behöver utvärdera en slutsats, en idé eller ett svar mot uppgiftsformuleringen.

**Återkoppling** Återkopplingen bör uttryckligen säga vad eleven ska utvärdera och sedan fråga hur eleven kan använda en del av uppgiftsformuleringen för utvärdering.

- i) ”Du säger att [återge det eleven säger som bör utvärderas]. Hur kan du kontrollera om det stämmer med informationen i uppgiften?” Detta förslag kan användas när eleven inte tagit hänsyn till all information som ges i uppgiften, eller har dragit en slutsats eller formulerat en lösningssidé som inte stämmer med all information i uppgiften. Till exempel:
  - **Stenplattor:** Eleven har ritat figur 4 och 5, beräknat antalet mörka och ljusa plattor i dem och frågar läraren om detta stämmer. Läraren kan då säga: ”Du undrar om du har ritat figur 4 och 5 rätt. Hur kan du kontrollera om det stämmer med det du får veta om figur 1, 2 och 3?”
  - **Ljusstakar:** Eleven frågar: ”Det finns väl många svar, jag kan ta ett bara? Till exempel 1 och 28 eller 2 och 27?” Läraren kan då säga: ”Du säger att man kan ta vilket svar som helst, till exempel 1 och 28 eller 2 och 27. Hur kan du kontrollera om det stämmer med informationen i uppgiften?”
- ii) ”Du säger att [återge det eleven säger som bör utvärderas]. Hur kan du kontrollera om det svarar på frågan i uppgiften?” Detta förslag kan användas när eleven felaktigt tror eller är osäker på om en slutsats hen dragit är svaret på uppgiften, till exempel:

- **Ljustakar:** Eleven frågar om det är 187 som är svaret. Eleven har genom systematisk prövning hittat antal som fungerar. Den sista beräkningen eleven har gjort är  $5 \cdot 8 + 7 \cdot 21 = 40 + 147 = 187$ . Läraren kan då säga: "Du undrar om 187 är svaret. Hur kan du kontrollera om det svarar på frågan i uppgiften?"

**Önskad respons** Eleven ger ett förslag på hur felet eller osäkerheten kan utvärderas mot uppgiftsformuleringen och påbörjar med eget resonemang en utvärdering, som kan leda till att eleven klargör vad som är fel/oklart och de matematiska orsakerna till varför det är så.

### 8.3 Eleven behöver utvärdera mot sin utforskning 2C

**Diagnos** Eleven behöver utvärdera en slutsats, en idé eller ett svar mot (del av) sin utforskning.

**Återkoppling** Återkopplingen bör uttryckligen säga vad eleven ska utvärdera och sedan fråga hur eleven kan använda en del av sin utforskning för utvärdering:

- "Du säger att [återge det eleven säger som bör utvärderas]. Hur kan du kontrollera om det stämmer med [något specifikt eleven gjort i sin utforskning]?" Detta kan till exempel användas när eleven är osäker på eller har en inkorrekt lösningsidé:
  - **Stenplattor, version 1:** Eleven har räknat antalet plattor i figurerna på bilden och ser att antalet mörka plattor ökar med fyra mellan varje figur. Hen frågar: "Det ökar med fyra varje gång, så då borde det bli 4 gånger 100. 400 mörka plattor i figur 100. Blir det rätt?" Läraren kan då säga: "Du säger att antalet mörka plattor i en figur är fyra gånger figurnumret. Hur kan du testa den idén antalen mörka plattor du räknat i figurerna?"

**Önskad respons** Eleven ger ett förslag på hur felet eller osäkerheten kan utvärderas mot (del av) utforskningen och påbörjar med eget resonemang en utvärdering, som kan leda till att eleven klargör vad som är fel/oklart och de matematiska orsakerna till varför det är så.

### 8.4 Eleven behöver utvärdera mot sin lösningsidé 3C

**Diagnos** Eleven behöver utvärdera omsättandet av lösningsidén genom att jämföra det med lösningsidén.

**Återkoppling** Återkopplingen bör uttryckligen säga vad eleven ska utvärdera och sedan fråga hur eleven kan använda sin lösningsidé för utvärdering:

- "Du säger att [återge det eleven säger som bör utvärderas]. Hur kan du kontrollera om det stämmer mot din idé att [sammanfatta elevens beskrivning av sin lösningsidé]?" Till exempel:
  - **Stenplattor, version 3:** Eleven frågar: "Det är ju en mörk platta i varje hörn, och sen är ju sidan figurnumret, och så är det fyra såna. Så är formeln  $(4+x) \cdot 4$  då?" Läraren kan då säga: "Du undrar om formeln blir  $(4+x) \cdot 4$ . Hur kan du kontrollera om formeln stämmer med det du just sa till mig nu, att du har en platta i varje hörn, och sedan fyra gånger figurnumret på kanterna?"

**Önskad respons** Eleven ger ett förslag på hur felet eller osäkerheten kan utvärderas mot sin egen lösningsidé och påbörjar med eget resonemang en utvärdering, som kan leda till att eleven klargör vad som är fel/oklart och de matematiska orsakerna till varför det är så.

### 8.5 Eleven behöver utvärdera mot sina matematiska förkunskaper XC

**Diagnos** Ibland beror ett fel eller en osäkerhet inte på relationen mellan olika delar av elevens resonemang för just denna uppgift, utan snarare relationen mellan något eleven har gjort nu och matematiska kunskaper som läraren vet att eleven lärt sig tidigare.

**Återkoppling** Återkopplingen bör uttryckligen säga vad eleven ska utvärdera och sedan fråga hur eleven kan använda tidigare kunskap för utvärdering:

- "Du säger att [återge det eleven säger som bör utvärderas]. Hur kan du kontrollera om det stämmer mot vad du vet om [den relevanta matematiken som behöver utvärderas mot]?"
  - **Cirkel:** Eleven säger: "Jag tycker det ser ut som om vinkeln BCK är  $90^\circ$ , men jag undrar om det stämmer, eftersom mina beräkningar av vinkeln BKC och sträckan KC blir

konstiga.” Läraren kan då säga: ”Du undrar om BCK är  $90^\circ$ . Hur kan du kontrollera om det stämmer mot vad du vet om vinklar på randen av en cirkel?”

**Önskad respons** Eleven ger ett förslag på hur felet eller osäkerheten kan utvärderas mot sina matematiska kunskaper och påbörjar med eget resonemang en utvärdering, som kan leda till att eleven klargör vad som är fel/oklart och de matematiska orsakerna till varför det är så.

## 8.6 Om eleven är fortsatt säker vid fel D

Ibland är eleven övertygad om att lösningen är rätt trots att det finns ett fel, även efter att CDEi och lämplig C-återkoppling ovan har getts. Denna diagnos kan ibland användas i stället för diagnoserna 1C-XC om de eller deras föreslagna återkopplingar inte passar.

**Diagnos** Eleven har ett fel i sin lösning som hen inte har sett och hen är så övertygad om att allt är rätt att hen inte ville försöka utvärdera själv när tidigare återkoppling gavs.

**Återkoppling** ”Du har en bra lösning, men det är någonting som inte riktigt stämmer. Försök hitta vad det är.”

**Önskad respons** Eleven påbörjar utvärdering av hela sin lösning.

## 8.7 Om eleven är fortsatt osäker vid rätt E

Ibland är eleven osäker trots att lösningen är rätt, även efter att CDEi och lämplig C-återkoppling ovan har getts. Denna diagnos kan ibland användas i stället för diagnoserna 1C-XC om de eller deras föreslagna återkopplingar inte passar.

**Diagnos** Eleven har utvärderat och ger bra argument för sin lösning, men fortsätter ändå söka bekräftelse från läraren.

**Återkoppling** ”Du har bra argument för din lösning. Du har övertygat mig om att den stämmer.”

**Önskad respons** Eleven blir också övertygad om lösningens korrekthet.

## 9 Hur kan man börja tillämpa formativ bedömning i sin klass?

Det kan vara utmanande att lyssna noga på eleven, ställa en noggrann diagnos och ge en passande återkoppling, särskilt när eleverna är vana vid att få snabb hjälp och det kanske är fler elever på tur. Det kan därför vara bra att först börja tillämpa delar av guiden och bygga på efterhand.

Några saker som har fungerat för att komma i gång med att tillämpa formativ bedömning och använda guiden är:

- Börja med att endast använda diagnosfrågorna (och ge sedan valfri hjälp). De kan ställas oavsett om eleverna arbetar med problem eller andra uppgifter, vilket betyder att de kan användas varje lektion. Efter ett tag blir eleverna vana vid dem och börjar ofta berätta vad de har gjort och varför utan att läraren behöver fråga.
- Börja därefter använda återkoppling för tolkningsfasen, när det är lämpligt.
- Testa att använda hela guiden någon gång under en lektion, eller vid ett tillfälle då du har färre elever i klassrummet. Det kan underlätta om du talar om för eleverna att du kommer testa att hjälpa dem på ett annat sätt, och att det kan kännas ovanligt.

## 10 Sammanfattande instruktioner för användning av guiden

På denna sida finns en sammanfattning av guidens riktlinjer och på nästa sida finns en kortfattad översikt över diagnosfrågor, diagnoser, återkopplingar och önskad respons. Dessa kan tas med i klassrummet som minnesstöd för läraren i interaktion med elever.

**Samla information** Börja alltid med att samla information om vad eleven tänkt. Använd diagnosfrågorna och det du ser att eleven gjort. Be eleven utveckla, skriva ned/rita eller ställ kompletterande frågor om du behöver mer information. Om eleven själv resonerar sig genom svårigheten när hen svarar på diagnosfrågorna bör du inte ge någon ytterligare återkoppling.

**Diagnosticering** Huvudfrågan du ställer dig under diagnosticeringen är: Vilken specifik svårighet behöver eleven hjälp med? Som stöd för diagnosticeringen, använd följande underfrågor och riktlinjer:

- Avgör först: Har eleven kört fast eller har eleven gjort fel/är osäker på om hen gjort rätt eller fel? När eleven både gjort fel och kört fast, hjälp eleven med felet först, för att därefter se om eleven själv kan komma vidare.
- Om eleven har kört fast: Hur långt har eleven kommit i processen? Om du tvekar, ställ hellre en tidigare än en senare diagnos.
- Om eleven har gjort fel/är osäker: Vad kan eleven utvärdera mot? Om du tvekar, börja med den generella återkopplingen CDEi.

**Återkoppling** Efter diagnos är ställd, bedöm om det är rimligt att eleven själv resonerar sig vidare.

- Om NEJ: använd inte guidens återkoppling, utan hjälp eleven på annat sätt.
- Om JA: använd guidens återkoppling.

Återkopplingen bör utformas så att den passar elevens kompetens och hjälper eleven att bygga vidare på sitt hittillsvarande resonemang. Återkopplingen bör vara avgränsad och anpassad till diagnosen av elevens svårighet och den önskade responsen. Om eleven har kört fast bör återkopplingen stödja eleven att komma vidare, om eleven har gjort fel eller är osäker bör återkopplingen stödja eleven att utvärdera. Du bör anpassa de föreslagna formuleringarna på återkoppling till eleven och situationen, men bevara inriktningen och undvika så långtgående ledning att du tar över ansvaret för problemets lösning. Om eleven inte förstår din återkoppling kan du följa upp med kompletterande återkoppling med samma inriktning. Komplettera gärna användandet av guiden med uppmuntran och bekräftelse som riktas mot att stödja elevens resonemang, särskilt om eleven tvekar eller inte försöker.

**Önskad respons** Ge eleven tid att tänka innan du ger eleven mer återkoppling. Lämna eleven så snart du bedömer att hen kan fortsätta med uppgiften på egen hand i linje med guidens önskade respons. Du behöver inte vara säker på att eleven kan lösa hela uppgiften, utan bara bedöma att eleven klarar att fortsätta en bit på egen hand. Även om eleven inte fortsätter direkt efter återkoppling kan det ibland vara lämpligt att lämna eleven en stund och återkomma.

Oavsett vad guiden föreslår är det du som lärare som i varje situation behöver göra bedömningen om förslagen är rimliga eller ej: det kan finnas andra bättre sätt att stödja eleven.

|           |                                                                                                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
|-----------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Kört fast | <b>AB</b> Eleven har kört fast, generell diagnos.                                                           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
|           | <b>ABi</b> "Hur tror du att du skulle kunna komma vidare? Prova det!" {Kommer vidare med sitt eget förslag} |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
|           |                                                                                                             | <b>1 Tolkning</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | <b>2 Utforskning</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
|           |                                                                                                             | <b>3 Skapa lösningsidé</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
|           | A innan fasen                                                                                               | <b>1A</b> Eleven försöker inte tolka.<br><b>1Ai:</b> "Vad ska du ta reda på?"<br><b>1Aii:</b> "Vad får du veta i uppgiften?"<br>{Påbörjar och genomför korrekt tolkning}                                                                                                                                                             | <b>2A</b> Eleven har tolkat men försöker inte utforska.<br><b>2Ai:</b> "Vilka strategier kan du? Prova någon av dem!"<br><b>2Aii:</b> "Vad vet du om ___?"<br>{Väljer strategi eller sätt för utforskning}                                                                                              |
|           |                                                                                                             | <b>3A</b> Eleven har utforskat tillräckligt men försöker inte skapa lösningsidé.<br><b>3Ai:</b> "Jag ser att du har gjort flera saker här. Berätta!"<br>Vid behov uppmana eleven att läsa/beskriva/förklara varje sak hen skrivit/ritat.<br>{Går igenom sin utforskning och finner något som kan användas för att skapa lösningsidé} |                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
|           | B i fasen                                                                                                   | <b>1B</b> Eleven försöker men lyckas inte tolka.<br><b>1Bi:</b> Förklara ord och formuleringar i uppgiftstexten, utan att avslöja hur uppgiften kan utforskas eller lösas.<br>{Genomför korrekt tolkning}                                                                                                                            | <b>2B</b> Eleven försöker men lyckas inte utforska.<br><b>2Bi:</b> Om eleven inte påbörjat strategi, föreslå lämplig <u>generell</u> strategi.<br><b>2Bii:</b> Om eleven påbörjat lämplig strategi, specificera hur nästa steg kan genomföras utan att lotsa eleven.<br>{Utforskar med eget resonemang} |
|           |                                                                                                             | <b>3B</b> Eleven försöker men lyckas inte skapa lösningsidé.<br><b>3Bi:</b> "Du sa att _____. Försök att använda det för att lösa uppgiften!"<br>{Försöker skapa lösningsidé med eget resonemang}                                                                                                                                    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |

|            |                                                                                                               |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                      |
|------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Fel/osäker | <b>CDE</b> Eleven har gjort fel eller är osäker på om hen gjort rätt eller fel, generell diagnos.             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                      |
|            | <b>CDEi:</b> "Du säger att: _____. Hur kan du kontrollera om stämmer?" {Ger förslag och påbörjar utvärdering} |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                      |
|            |                                                                                                               | <b>1 Tolkning</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | <b>2 Utforskning</b>                                                                                                                                                                                                 |
|            |                                                                                                               | <b>3 Lösningsidé</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |                                                                                                                                                                                                                      |
|            | C utvärdera mot                                                                                               | Eleven har gjort ett fel eller är osäker på en slutsats, idé eller svaret, vilket kan utvärderas mot:<br><b>1C</b> uppgiftsformuleringen.<br><b>1Ci:</b> "Du säger att: _____. Hur kan du kontrollera om det stämmer med informationen i uppgiften?"<br><b>1Cii:</b> "Du säger att: _____. Hur kan du kontrollera om det svarar på frågan i uppgiften?"<br>{Ger förslag och påbörjar utvärdering mot uppgiftsformuleringen}                                                                                       | <b>2C</b> (del av) sin utforskning.<br><b>2Ci:</b> "Du säger att: _____. Hur kan du kontrollera om det stämmer med [del av elevens utforskning]?"<br>{Ger förslag och påbörjar utvärdering mot (del av) utforskning} |
|            |                                                                                                               | <b>3C</b> sin lösningsidé.<br><b>3Ci:</b> "Du säger att: _____. Hur kan du kontrollera om det stämmer med din idé att ___?"<br>{Ger förslag och påbörjar utvärdering mot sin egen lösningsidé}                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |                                                                                                                                                                                                                      |
|            | DE fortsatt (o)säker                                                                                          | <b>XC</b> matematiska förkunskaper.<br><b>XCi:</b> "Du säger att: _____. Hur kan du kontrollera om det stämmer med det du vet om ___?"<br>{Ger förslag och påbörjar utvärdering mot matematiska förkunskaper}                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                                                                      |
|            |                                                                                                               | <b>D</b> Eleven har ett fel och är efter ovanstående återkoppling fortfarande övertygad om att allt är rätt.<br><b>Di:</b> "Du har en bra lösning, men det är någonting som inte riktigt stämmer. Försök hitta det."<br>{Påbörjar utvärdering av lösningen}<br><b>E</b> Eleven har utvärderat med bra argument, men söker fortfarande bekräftelse av läraren.<br><b>Ei:</b> "Du har bra argument för din lösning. Du har övertygat mig om att den stämmer."<br>{Blir själv övertygad om att lösningen är korrekt} |                                                                                                                                                                                                                      |

## UmU Reports in STEM Education

2025:1    Lithner, Johan, Säfström, Anna Ida, Palmberg, Björn, Sidenvall, Johan, Granberg, Carina, Andersson, Catarina, Boström, Erika & Palm, Torulf. *En lärarguide för att stödja elevers problemlösning*. ISBN 978-91-8070-585-1

